



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Это цифровая копия книги, хранящейся для потомков на библиотечных полках, прежде чем ее отсканировали сотрудники компании Google в рамках проекта, цель которого - сделать книги со всего мира доступными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских прав на эту книгу истек, и она перешла в свободный доступ. Книга переходит в свободный доступ, если на нее не были поданы авторские права или срок действия авторских прав истек. Переход книги в свободный доступ в разных странах осуществляется по-разному. Книги, перешедшие в свободный доступ, это наш ключ к прошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все пометки, примечания и другие записи, существующие в оригинальном издании, как напоминание о том долгом пути, который книга прошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использования

Компания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы перевести книги, перешедшие в свободный доступ, в цифровой формат и сделать их широкодоступными. Книги, перешедшие в свободный доступ, принадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, поэтому, чтобы и в дальнейшем предоставлять этот ресурс, мы предприняли некоторые действия, предотвращающие коммерческое использование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические запросы.

Мы также просим Вас о следующем.

- Не используйте файлы в коммерческих целях.
Мы разработали программу Поиск книг Google для всех пользователей, поэтому используйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.
- Не отправляйте автоматические запросы.
Не отправляйте в систему Google автоматические запросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного перевода, оптического распознавания символов или других областей, где доступ к большому количеству текста может оказаться полезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем использовать материалы, перешедшие в свободный доступ.
- Не удаляйте атрибуты Google.
В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он позволяет пользователям узнать об этом проекте и помогает им найти дополнительные материалы при помощи программы Поиск книг Google. Не удаляйте его.
- Делайте это законно.
Независимо от того, что Вы используете, не забудьте проверить законность своих действий, за которые Вы несете полную ответственность. Не думайте, что если книга перешла в свободный доступ в США, то ее на этом основании могут использовать читатели из других стран. Условия для перехода книги в свободный доступ в разных странах различны, поэтому нет единых правил, позволяющих определить, можно ли в определенном случае использовать определенную книгу. Не думайте, что если книга появилась в Поиске книг Google, то ее можно использовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских прав может быть очень серьезным.

О программе Поиск книг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне доступной и полезной. Программа Поиск книг Google помогает пользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый поиск по этой книге можно выполнить на странице <http://books.google.com/>

Sci 905.75

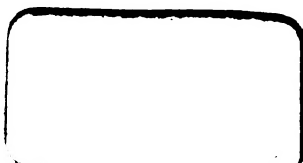


Harvard College Library

FROM

"Annals of Mathematics"

SCIENCE CENTER LIBRARY



[Signature]

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ VIII.



ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-въ.
(Рибная улица, домъ № 30-й).
1904.



14/8
2/10

BOUND. SEP 15 1910

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 25-го Октября 1904 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

VIII-го тома.

Стр.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ 1-му октября 1904 года	V—VII
Объ инвариантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ; <i>Д. Мордугай-Болтовскаго</i>	1—67
Математическая задача объ универсальныхъ колебаніяхъ; <i>А. Корна</i>	68—112
Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка; <i>В. П. Ермакова</i>	113—122
Зависимость между кинкелиновыми и гаммоморфными функціями; <i>В. П. Алексѣевскаго</i>	123—135
Замѣтки о формулахъ суммированія Эйлера и Буля; <i>В. А. Стеклова</i>	136—195
Періодическія функціи; <i>В. П. Ермакова</i>	196—209
Къ теоріи коннексовъ [Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)]; <i>Д. М. Синцова</i>	210—281
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій	283—287

TABLE DES MATIÈRES

du tome VIII.

	<i>pag.</i>
Liste des membres de la Société mathématique de Kharkof	V—VII
Sur les transformations invariantes des intégrales ultra-elliptiques; par <i>D. Mordoukhay-Boltowsky</i>	1—67
Sur le problème mathématique des vibrations universelles; par <i>A. Korn</i>	68—112
Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre; par <i>W. Ermakoff</i>	113—122
Relations entre les fonctions de M. Kinkelin et les fonctions gamnomorphes; par <i>W. Alexéevsky</i>	123—135
Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Boole; par <i>W. Stekloff</i>	136—195
Sur les fonctions périodiques; par <i>W. Ermakoff</i>	196—209
Études sur les connexes; par <i>D. Sintsof</i>	210—281
Extrait des procès verbaux des séances	283—285

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му октября 1904 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: В. А. Стекловъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. П. Грузинцевъ и В. П. Алексѣвскій.
3. Секретарь А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣвичъ, проф. Московскаго универс.
2. Р. Appell, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПб. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владимира.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПб. университета.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПб. университета, академикъ.
9. Е. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. Н. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПб. электро-техн. ин.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьков. универс.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣвскій Владиміръ Петровичъ, проф. Харьковскаго универс.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣвичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. университета св. Владимира.

6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инстит.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальнаго училища.
8. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьковскаго университета.
9. Деларю Данилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
10. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. универ.
11. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, директ. Кіев. политехн. инст.
12. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. технологич. института.
13. Кириичевъ Викторъ Львовичъ, проф. СПБ.
14. Киселевъ Андрей Пестровичъ, препод. Воронежскаго кадет. корпуса.
15. Ключниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимназіи.
16. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьковскаго технолог. инст.
17. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьковской гимн.
18. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. нар. учил. Курск. губ.
19. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
20. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, бывш. проф. Харьк. технол. инст.
21. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
22. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣл. въ Харьк.
23. Маевскій Андрей Васильевичъ, преп. 3-й Харьковской гимназіи.
24. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
25. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго техн. института.
26. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
27. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, бывш. проф. Харьк. техн. ин.
28. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
29. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
30. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, приватъ-доцентъ Харьков. универс.
31. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
32. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьковскаго учебн. окр.
33. Рейнбоотъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьковск. универ.
34. Роговской Евгеній Александровичъ, проф. Харьковскаго универс.
35. Рудневъ Пётръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюпинск. реал. учил.
36. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
37. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, преп. Изюмскаго реальн. училища.
38. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
39. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго университета.
40. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьковской гимназіи.
41. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьковскаго университета.
42. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
43. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьковск. унив.
44. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Усть-Медвѣд. реальн. училища.
45. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьков. гимназ.
46. Шиллеръ Николай Николаевичъ, директ. Харьковскаго техн. инст.

47. Шимковъ Андрей Петровичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
48. Шиховъ Василій Васильевичъ, дирек. Харьковскаго реал. училища.
49. Птукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьковской гимн.
50. Чернай Николай Александровичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.

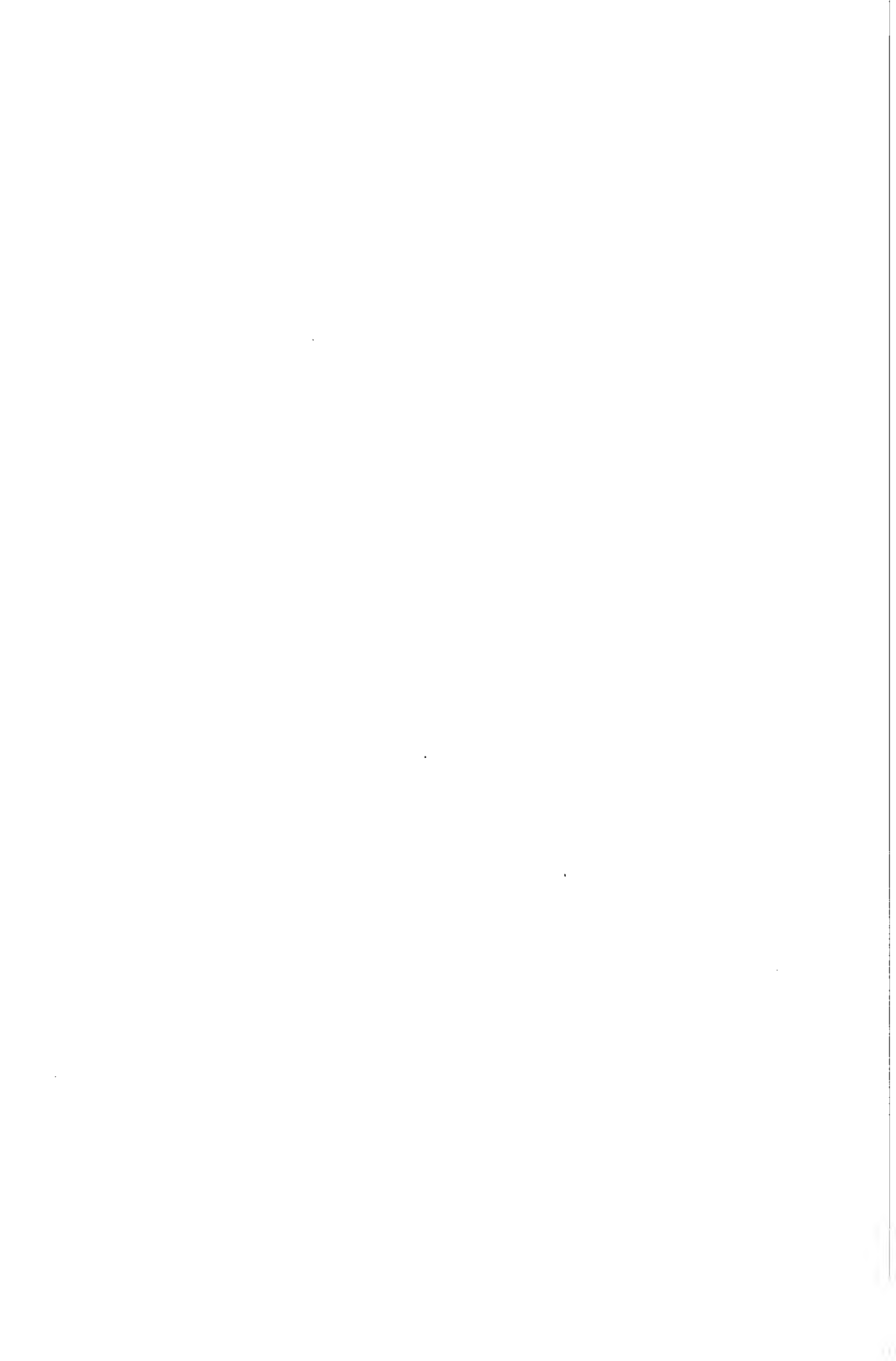
D. Члены-корреспонденты.

а) русскіе:

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго университет.
2. Вороной Георгій Ѳеодосѣевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго университет.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московскаго учебн. округа.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ. проф. СІІБ. университета.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. горнаго института.
7. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Пермской гимназіи.

b) иностранные:

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго университета.
 2. Hadamard J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
 3. Hurwitz A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
 4. Kneser A., проф. Берлинской горной академіи (Bergakademie).
 5. Korn A., проф. Мюнхенскаго университета.
 6. Zaremba S., проф. Краковскаго университета.
-



Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рибная улица, домъ № 30-й).

1902.



удовлетворяют слѣдующимъ условіямъ:

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),$$

$$f_1(x^2) = -f_1\left(\frac{1 - k^2 x^2}{k^2(1 - x^2)}\right),$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1 - x^2}{1 - k^2 x^2}\right).$$

При этихъ условіяхъ приведеніе выполняется подставками

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи обнимаетъ интегралы Эрмита, причемъ только что упомянутый результатъ, полученный довольно сложнымъ путемъ Эрмитомъ, выводится, какъ простое слѣдствіе изслѣдованій Раффи. Кромѣ того, какъ я ниже покажу, изслѣдованія Эйлера, Реалиса ¹⁾, Малле²⁾ и Буняковского ³⁾ являются тоже слѣдствіями тѣхъ же изслѣдованій.

Раффи доказываетъ, что, если раціональная функція $f(x)$ такова, что при x и y , удовлетворяющихъ Эйлеровскому уравненію

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$f(x)$ удовлетворяетъ условію

$$f(x) + f(y) = 0,$$

то

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

¹⁾ Nouvelles Annales de Mathématiques, p. 389, 1882.

²⁾ Mallet. Two theorems in integration. Annali di matematica pura ed applicata, t. V, p. 252.

³⁾ Буняковский. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости. Приложение къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

есть интегралъ псевдо-эллиптический, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логарифмическія функціи.

Здѣсь особенно интересенъ тотъ фактъ, что при вышеупомянутыхъ условіяхъ

$$\frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{f(y) dy}{\sqrt{R(y)}},$$

или, по терминологіи Раффи, эллиптический дифференціалъ

$$\frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инвариантное преобразование, такъ что теорема Раффи формулируется еще такъ: если эллиптический дифференціалъ

$$\frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инвариантное преобразование, то

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

интегралъ псевдо-эллиптический.

Изъ этого обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи выдѣляетъ группу, которой соотвѣтствуетъ преобразование типа

$$Nxy = L(x + y) + M$$

(гдѣ L , M , N постоянныя), которой занимался съ нѣкоторой другой точки зрѣнія также Гурза ¹⁾.

Для интеграловъ этой группы Раффи даетъ общую формулу: для $a + b$ не равно $c + d$

$$\int \left(x - \frac{Lx + M}{x - L} \right) \psi \left(\frac{x^2 + M}{x - L} \right) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

$$L = \frac{ab - cd}{(a + b) - (c + d)},$$

$$M = \frac{(a + b)cd - (c + d)ab}{(a + b) - (c + d)},$$

¹⁾ Goursat. Note sur quelques integrales pseudo-elliptiques. Bulletin de la Société Mathématique, t. XV.

а Ψ означаетъ рациональную функцію. Для $a + b = c + d$ на основаніи изслѣдованій Раффи получаемъ формулу

$$\int \frac{x^2 - M}{x} \Psi\left(\frac{x^2 + M}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ у $R(x)$ и Ψ тѣже значенія, а

$$M = a + b = c + d.$$

Мы беремъ болѣе общій случай, когда подъ радикаломъ стоитъ полиномъ какой угодно степени (не ниже 3-ей) и вмѣсто дифференціального уравненія Эйлера, служащаго основой изслѣдованій Раффи, беремъ систему дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \\ \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{x_1^{n-2} dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

гдѣ

$$X_i = a_{2n} x_i^{2n} + a_{2n-1} x_i^{2n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0,$$

которую можно писать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}, \quad (2)$$

если

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Понятіе объ инвариантномъ преобразованіи обобщается такъ:
Ультраэллиптическій дифференціаль

$$\frac{f(x) dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инвариантное преобразованіе, если для x и y , удовлетворяющихъ уравненіямъ Якоби, имѣютъ мѣсто равенства

уравнений въ особенной и для нашей цѣли весьма полезной формѣ. Мы приводимъ теорему Якоби, сдѣлавъ необходимое, по нашему мнѣнію, дополненіе къ его доказательству.

Теорема I.

Рѣшенія x_1, x_2, \dots, x_n системы конечныхъ уравненій

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\ p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= \frac{Y_n}{Y}, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} Y &= r_n y^2 + 2s_n y + t_n, \\ Y_1 &= r_{n-1} y^2 + 2s_{n-1} y + t_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_n &= r_0 y^2 + 2s_0 y + t_0 \end{aligned} \tag{7}$$

полиномы 2-ой степени относительно y , суть общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \\ \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x_1^{n-2} dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{X_n}} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

если коэффициенты $r_n, s_n, t_n, r_{n-1}, s_{n-1}, t_{n-1}, \dots, r_0, s_0, t_0$ удовлетворяют $2n+1$ уравнениямъ, получающимся отъ приравниванія коэффициентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ тождества:

$$[s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_0]^2 - [r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n r_0] [t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n t_0] = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если принять обозначенія (6), то x_1, x_2, \dots, x_n должны быть корнями уравненія

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n = 0.$$

Если x_1, x_2, \dots, x_n рѣшенія системы уравненій (5), то уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$Yx^n - Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n Y_n = 0, \quad (8)$$

гдѣ Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n имѣютъ значенія (7).

Расположенное по нисходящимъ степенямъ y , это уравненіе представляется еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ry^2 + 2Sy + T = 0, \quad (9)$$

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} r_1 x + (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} s_1 x + (-1)^n s_0, \quad (10)$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} t_1 x + (-1)^n t_0.$$

Мы докажемъ, что всѣ корни уравненія (8) представляютъ изъ себя рѣшенія: x_1, x_2, \dots, x_n уравненій (1), если мы имѣемъ тождественно

$$S^2 - RT = a_{2n} x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 = X$$

при всякомъ x , т. е. если имѣютъ мѣсто тѣ $2n+1$ уравненій, которыя получаются отъ приравниванія коэффициентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ.

Для доказательства дифференцируемъ уравненіе (8).

Тогда на основаніи тождества

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n Y_n$$

получаемъ

$$\frac{dx}{Ry + S} + \frac{2dy}{nYx^{n-1} - (n-1)Y_1x^{n-2} + \dots (-1)^{n-1}Y_{n-1}} = 0,$$

или, вводя обозначеніе

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

$$\frac{dx}{Ry + S} + \frac{2dy}{YF'(x)} = 0. \quad (12)$$

Замѣчая, что по условію

$$Ry + S = \pm \sqrt{S^2 - RT},$$

или, условившись подразумѣвать оба значенія радикала,

$$Ry + S = \sqrt{S^2 - RT}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{\sqrt{S^2 - RT}} + \frac{2dy}{YF'(x)} = 0.$$

Но по условію

$$S^2 - RT = X \quad (11)$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{2dy}{YF'(x)} = 0.$$

Подобное уравненіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ корней уравненія
(8) $x = x_1, x_2, \dots, x_n$.

Мы можемъ, значить, написать

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} + \frac{2dy}{YF'(x_i)} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (12)$$

Суммируя эти уравненія, умноживъ, предварительно, каждое на x_i^k , получаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k dx_i}{\sqrt{X_i}} = 0$$

для $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 2$, такъ какъ для этихъ значеній k

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} = 0.$$

Такимъ образомъ корни x_1, x_2, \dots, x_n уравненія (8) или, что тоже, рѣшенія системы (4) удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ Якоби (1).

Теперь покажемъ, что полиномы R, S, T могутъ существовать при всѣхъ X и что уравненіе (8) даетъ общія рѣшенія системы (1), т. е. рѣшенія, въ которыя входитъ ровно $n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Такъ какъ R, S, T полиномы n -ой степени, то число коэффициентовъ, въ нихъ входящихъ $3(n + 1)$. Съ коэффициентами: $a_{2n}, a_{2n-1}, \dots, a_1, a_0$ они связаны числомъ уравненій, равнымъ числу этихъ послѣднихъ; $3(n + 1) - (2n + 1) = (n + 2)$ коэффициента остаются неопредѣленными. Якоби показываетъ, что хотя произвольныхъ величинъ входитъ $n + 2$, но онѣ сводится къ $n - 1$, такъ что число произвольныхъ постоянныхъ будетъ не болѣе $n - 1$, какъ слѣдовало ожидать. Однако отсюда еще не слѣдуетъ, что найденныя рѣшенія суть общія, можно вообразить, что и эти $n - 1$ произвольныя постоянныя сводятся еще къ меньшему числу. Мы докажемъ, что рѣшенія дѣйствительно общія, если будетъ нами доказано, что для коэффициентовъ r, s, t можно всегда найти значенія, согласныя съ условіемъ (11) и такія, что для $x_1 = a_1$ величины x_2, x_3, \dots, x_n принимаютъ напередъ назначенныя значенія, напримѣръ, a_2, a_3, \dots, a_n .

Принимаемъ за a_1 значеніе x_1 для $y = 0$.

Но для

$$y = 0 \quad s_i = \sqrt{X_i},$$

или

$$s_n a_i^n - s_{n-1} a_i^{n-1} + \dots (-1)^n s_0 = \sqrt{X_i}, \quad (i=2..n)$$

изъ этихъ $n - 1$ уравненій опредѣляемъ s_n, s_{n-1}, \dots, s_0 , причемъ даже можемъ положить для простоты

$$s_n = 0, \quad s_{n-1} = 0.$$

При всевозможныхъ значеніяхъ a_2, a_3, \dots, a_n , при которыхъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2^{n-1} a_2^{n-2} \dots 1 \\ a_3^{n-1} a_3^{n-2} \dots 1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n^{n-1} a_n^{n-2} \dots 1 \end{vmatrix} = (a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_{n-1} - a_n)$$

Дѣйствительно, приравнявъ коэффициенты при y^4, y^3, y^2, y, y^0 нулю, получимъ 5 уравненій линейныхъ и однородныхъ относительно $\alpha_1^{(k)}, 2\beta_1^{(k)}$, и т. д. Сокращая же на Y^2 уравненіе (a) имѣемъ:

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(k)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0.$$

Такимъ же образомъ получаемъ и остальные уравненія (13). Эти уравненія, опредѣляющія p_1, p_2, \dots, p_n , въ функціи отъ p_k , а по нимъ x_1, x_2, \dots, x_n , независимы другъ отъ друга, если только заразъ не равны нулю: $\gamma_s^{(k)}, \delta_s^{(k)}, \zeta_s^{(k)}, \gamma_m^{(k)}, \delta_m^{(k)}, \zeta_m^{(k)}$, т. е. когда p_k не равно постоянному, ибо тогда въ каждое уравненіе будетъ входить по новой буквѣ.

При нѣкоторыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ можетъ случиться, что

$$\delta_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} = \zeta_1^{(k)} = 0,$$

$$\delta_2^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} = \zeta_2^{(k)} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\delta_n^{(k)} = \varepsilon_n^{(k)} = \zeta_n^{(k)} = 0$$

и уравненія (13) обращаются тогда въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 &= 0, \\ \alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots & \\ \alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} &= 0, \\ \alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k-1} &= 0, \\ \dots \dots \dots & \\ \alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Рѣшимъ вопросъ, при всякихъ ли значеніяхъ коэффициентовъ полинома X это возможно, и найдемъ въ случаѣ возможности значенія коэффициентовъ α, β, γ въ уравненіяхъ (14).

Если

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\ p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\ \dots \dots \dots & \\ p_n &= \frac{Y_n}{Y}, \end{aligned} \tag{5}$$

то уравненія (14) можно написать такимъ образомъ:

$$\alpha_i^{(k)} Y + 2\beta_i^{(k)} Y_k + 2\gamma_i^{(k)} Y_i = 0. \quad (i=1, 2, 3, \dots, k-1, n+1, n)$$

Значенія $\alpha_i^{(k)}$, $2\beta_i^{(k)}$, $2\gamma_i^{(k)}$ получаемъ, приравнивая нулю коэффиціенты при y^2 , y , y^0 въ лѣвой части, т. е. изъ уравненій

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(k)} r_n + 2\beta_i^{(k)} r_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} r_{n-i} &= 0, \\ \alpha_i^{(k)} s_n + 2\beta_i^{(k)} s_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} s_{n-i} &= 0, \\ \alpha_i^{(k)} t_n + 2\beta_i^{(k)} t_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} t_{n-i} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Не нарушая общности рѣшенія, можемъ, какъ выше замѣтили, положить

$$s_n = 0, \quad s_{n-1} = 0.$$

Но тогда также и $s_{n-k} = 0$, а потому и

$$s_{n-2} = 0, \quad s_{n-3} = 0, \dots, s_1 = 0, \quad s_0 = 0. \quad (16)$$

$$p_1 = \frac{r_{n-1}y^2 + t_{n-1}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$p_2 = \frac{r_{n-2}y^2 + t_{n-2}}{r_n y^2 + t_n},$$

.

$$p_n = \frac{r_0 y^2 + t_0}{r_n y^2 + t_n}.$$

Для того, чтобы эти значенія удовлетворяли системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$S^2 - RT = X,$$

а такъ какъ $S = 0$, то

$$RT = -X,$$

или

$$RT = -a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{2n}),$$

откуда

$$r_n t_n = -a_{2n}$$

Изъ уравненій (15) получаемъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{r_{n-k}t_{n-i} - t_{n-k}r_{n-i}} = \frac{2\beta_i^{(k)}}{-(r_n t_{n-i} - r_{n-i}t_n)} = \frac{2\gamma_i^{(k)}}{(r_n t_{n-k} - t_n r_{n-1})}.$$

Эти уравненія, по раздѣленіи знаменателя каждаго члена на r_n и t_n , на основаніи уравненія (18) преобразовываются такъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i} = \frac{2\beta_i^{(k)}}{-(\pi'_i - \pi''_i)} = \frac{2\gamma_i^{(k)}}{(\pi''_k - \pi'_k)}.$$

Откуда

$$p_i = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k} p_k + \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k},$$

или, какъ мы условимся впредь обозначать

$$p_i = L_i^{(k)} p_k + M_i^{(k)}, \quad (19)$$

гдѣ

$$L_i^{(k)} = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k}, \quad (20)$$

$$M_i^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k}. \quad (21)$$

Такимъ образомъ имѣетъ мѣсто

Теорема III-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненіямъ вида:

$$p_i = a_i^{(k)} p_k + b_i,$$

то

$$a_i^{(k)} = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k} = L_i^{(k)},$$

$$b_i^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k} = M_i^{(k)},$$

гдѣ $\pi'_i, \pi''_i, \pi'_k, \pi''_k$ имѣютъ значенія (17).

Посмотримъ, каково должно быть условіе, чтобы уравненіе

$$p_i = L_i^{(k)} p_k + M_i^{(k)}$$

обращалось въ

$$p_i = M_i^{(k)} = \text{const.} \quad (22)$$

Для этого, какъ это видно изъ уравненія (19), необходимо и достаточно, чтобы

$$L_i^{(k)} = 0,$$

или по (20)

$$\pi'_i = \pi''_i. \quad (23)$$

Если мы имѣемъ

$$\pi'_i = \pi''_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

то уравненія (19) обращаются въ слѣдующія

$$p_i = M_i^{(k)} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n;$$

отсюда получаемъ теорему:

Теорема IV-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби таковы, что

$$p_i = \text{const.} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

то, во первыхъ, корни полинома X таковы, что имѣютъ мѣсто между ними соотношенія

$$\pi'_i = \pi''_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n;$$

во вторыхъ

$$p_i = M_i^{(k)},$$

гдѣ

$$M_i^{(k)} = \pi'_i = \pi''_i.$$

Отмѣтимъ въ заключеніе одно интересное свойство рѣшеній Якобіевскихъ уравненій, вытекающее изъ предыдущей теоріи.

Теорема V-я.

Всякая симметрическая функція рѣшеній x_1, x_2, \dots, x_n Якобіевскихъ уравненій выражается рационально черезъ $\sqrt{X_i}$ и x_i .

Дѣйствительно, мы имѣемъ по теоремѣ I

$$p_k = \frac{r_{n-k}y^2 + 2s_{n-k}y + t_{n-k}}{r_ny^2 + 2s_ny + t_n},$$

но изъ уравненія

$$R_iy^2 + 2S_iy + T_i = 0,$$

въ которомъ R_i, S_i, T_i значенія R, S, T при $x = x_i$,

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{S_i^2 - R_iT_i}}{R_i};$$

но $S_i^2 - R_iT_i = X_i$, слѣдовательно

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{X_i}}{R_i}. \quad (24)$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе p_k , получаемъ

$$p_k = \frac{M_k + N_k\sqrt{X_i}}{M_n + N_n\sqrt{X_i}} \quad (k=1, 2, 3 \dots n)$$

въ видѣ рациональной функціи отъ x_i и $\sqrt{X_i}$.

Такъ какъ всякая симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n выражается рационально черезъ p_1, p_2, \dots, p_n , то теорема такимъ образомъ доказана.

§ 3. Существеннымъ добавленіемъ къ изслѣдованіямъ Якоби являются прекрасныя изслѣдованія Ришло ¹⁾, давшего два интеграла Якобіевскихъ уравненій, подобныхъ интегралу Эйлеравскаго уравненія ²⁾

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

¹⁾ Richelot. Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 23, стр. 361. Richelot. Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 25.

²⁾ Lagrange. Oeuvres Complètes, t. II, p. 18.

Дифференцируя по t и замѣняя $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ ихъ выра-
женіями (2), получаемъ

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \left(\frac{X_1}{F'(x_1)^2} \right)}{\partial x_1} \right] + \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)} \frac{1}{x_1 - x_k}$$

и т. д.

Складывая эти уравненія, получаемъ по сокращеніи

$$2 \frac{d^2 p_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2} \right)}{\partial x_k}. \quad (27)$$

Черезъ сложеніе же уравненій (2)

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}. \quad (28)$$

Разлагая дробь $\frac{X}{F(x)^2}$ на простѣйшія, получаемъ

$$\frac{X}{F(x)^2} - a_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X_k}{F'(x_k)^2} \frac{1}{(x - x_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial \left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2} \right)}{\partial x_k} \right] \frac{1}{x - x_k}.$$

Разлагая обѣ части этого тождества по нисходящимъ степенямъ x и приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{x}$, получаемъ

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \left[\frac{X_k}{F'(x_k)^2} \right]}{\partial x_k},$$

или, на основаніи (27),

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = 2 \frac{d^2 p_1}{dt^2}.$$

Умножая на $\frac{dp_1}{dt}$ и интегрируя, получаемъ

$$\left(\frac{dp_1}{dt} \right)^2 = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{K}. \quad (29)$$

Отсюда, по замѣнѣ $\frac{dp_1}{dt}$ его выраженіемъ (28), получаемъ формулу (25).

Перейдемъ теперь къ нѣкоторымъ характеристическимъ свойствамъ Якобиевскихъ уравненій, позволяющимъ вывести изъ только что найденнаго интеграла остальные $n - 2$ интеграла, а въ томъ числѣ и второй интегралъ Ришло.

Лемма.

Если x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяютъ системѣ дифференціальнаго уравненія Якоби

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k dx_i}{\sqrt{X_i}} = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (1)$$

то y_1, y_2, \dots, y_n , связанныя съ x_1, x_2, \dots, x_n соотношеніями

$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (30)$$

удовлетворяютъ системѣ аналогичныхъ дифференціальнаго уравненія

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (31)$$

гдѣ

$$Y_i = b_{2n} y_i^{2n} + b_{2n-1} y_i^{2n-1} + \dots + b_1 y_i + b_0 = a_{2n} (dy - b)^{2n} + \\ + a_{2n-1} (dy - b)^{2n-1} (-cy + a) + \dots + a_0 (-cy + a)^{2n}. \quad (32)$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи (30),

$$\frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc - ad)(cx_i + d)^{n-k-2} (ax_i + b)^k dx_i}{\sqrt{X_i}},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{g_0^{(k)} + g_1^{(k)} x_i + \dots + g_{n-2}^{(k)} x_i^{n-2}}{\sqrt{X_i}} dx_i,$$

или, на основаніи уравненія (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0. \quad (\text{при } k=0, 1, 2, \dots, n-2) \quad (31)$$

Теорема VII-я.

Рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}, \quad (32)$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d} dt, \quad (33)$$

$$L = b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma, \quad (34)$$

Γ произвольная постоянная, а $b_{2n}, b_{2n-1}, \dots, b, a$ имѣютъ тоже значеніе, что въ леммѣ; t связано съ t соотношеніемъ

$$dt_1 = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)}, \quad (35)$$

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d) \dots (cx_n + d). \quad (36)$$

По леммѣ, y_1, y_2, \dots, y_n , связанныя съ x_1, x_2, \dots, x_n соотношеніями (30), когда x_1, x_2, \dots, x_n рѣшенія Якобьевскихъ уравненій, удовлетворяютъ уравненіямъ (31), получающимся замѣной x_1, x_2, \dots, x_n . X_1, X_2, \dots, X_n на y_1, y_2, \dots, y_n , Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Но x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяя уравненіямъ Якоби (1), удовлетворяютъ, по теоремѣ VI, вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}. \quad (29)$$

Значитъ, y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющіе тоже уравненіямъ Якоби (31), удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma}, \quad (32)$$

получаемому замѣной x_1, x_2, \dots, x_n на y_1, y_2, \dots, y_n .

Дѣйствительно, при такой замѣнѣ p_1 должна перейти въ q_1 , определяемой формулой (33).

Для того же, чтобы узнать, во что переходить t , преобразуемъ уравненія

$$\frac{\Phi'(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \frac{\Phi'(y_2)dy_2}{\sqrt{Y_2}} = \dots = \frac{\Phi'(y_n)dy_n}{\sqrt{Y_n}} = dt, \quad (37)$$

$$\Phi(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_n),$$

равносильнымъ уравненіямъ (31), подставивъ въ нихъ вмѣсто y ихъ выраженія (30) въ x .

Тогда получимъ

$$\Phi'(y_i) = \frac{(bc - ad)^{n-1} F'(x_i)}{(cx_1 + d)^{n-1} (cx_1 + d)(cx_2 + d) \dots (cx_{i-1} + d)(cx_{i+1} + d) \dots (cx_n + d)},$$

и

$$dy_i = \frac{(bc - ad)}{(cx_i + d)^2} dx_i,$$

$$dt_i = \frac{\Phi'(y_i)dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)} dt, \quad (35)$$

гдѣ

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d) \dots (cx_n + d). \quad (36)$$

Уравненіе (32), на основаніи соотношенія (35), можно еще написать такимъ образомъ

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)} \sqrt{L}, \quad (38)$$

или, такъ какъ по (33),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(bc - ad)}{(cx_i + d)^2} \frac{dx_i}{dt},$$

или, по уравненіямъ (2),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i + d)^2 F''(x_i)},$$

то

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i + d)^2 F'(x_i)} = \frac{(bc - ad)^{n-1}}{\Pi(x)^2} \sqrt{F}, \quad (39)$$

полагая $L = \frac{F}{\Pi(x)^2}$, гдѣ F будетъ очевидно цѣлой симметрической функцией отъ x_1, x_2, \dots, x_n .

Полагая

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1,$$

получаемъ первый интегралъ Ришло (25).

Полагая

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0,$$

получаемъ второй интегралъ Ришло

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{x_i^2 F'(x_i)} = \frac{\sqrt{a_0 p_{n-1}^2 + a_1 p_n p_{n-1} + B p_n^2}}{p_n^2},$$

гдѣ B произвольная постоянная.

Замѣтимъ здѣсь, мимоходомъ, что, если мы возьмемъ $n - 1$ системъ значеній a, d, c, d такихъ, что не имѣютъ мѣсто равенства

$$a_i d_i - b_i c_i = 0,$$

и

$$\frac{d_i}{c_i} = \frac{d_k}{c_k},$$

то $n - 1$ уравненій (39), соответствующихъ имъ, представятъ $n - 1$ независимыхъ интеграловъ уравненій Якоби. Впрочемъ это замѣчаніе въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ не понадобится.

§ 4. На основаніи теоремы Ришло можно вывести важный результатъ, служащій развитіемъ §-а 2-ого.

Теорема VIII-я.

Всякая раціональная симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n выражается раціонально черезъ

$$p_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

и \sqrt{K} , гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C.$$

Для доказательства возьмемъ уравненіе §-а 2-ого

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} - \frac{2dy}{YF'(x_i)} = 0, \quad (12)$$

или

$$dx_i - \frac{2\sqrt{X_i}dy}{YF'(x_i)} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Складывая эти уравненія, получаемъ

$$dp_1 - 2 \left(\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \dots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} \right) \frac{dy}{Y},$$

или, такъ какъ по теоремѣ Ришло (25)

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \dots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} = \sqrt{K},$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

то получаемъ

$$\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{2dy}{Y}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dp_1}{\sqrt{K}} = 2 \int \frac{dy}{Y} + \Gamma. \quad (40)$$

Если a_{2n} не равно нулю, то

$$\int \frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \lg \left(\frac{2a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K} \right). \quad (41)$$

Если $a_{2n} = 0$ и a_{2n-1} не равно нулю, то

$$\int \frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{2}{a_{2n-1}} \sqrt{K}, \quad (42)$$

и, наконецъ, если $a_{2n} = 0$ и $a_{2n-1} = 0$, то

$$\int \frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{p_1}{\sqrt{K}}. \quad (43)$$

Если мы положимъ, какъ въ §-ѣ 2-омъ,

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n s_0,$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0,$$

то, подставляя эти выраженія въ тождество

$$S^2 - RT = X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

получимъ въ лѣвой части

$$S^2 - RT = (s_n^2 - r_n t_n) x^{2n} + (-2s_n s_{n-1} + r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n) x^{2n-1} + \dots,$$

а въ правой части

$$X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

получимъ

$$a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n; \quad (44)$$

кромѣ того

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n,$$

откуда

$$Y = r_n y^2 + 2s_n y + t_n,$$

или

$$Y = r_n (y - \xi)(y - \eta),$$

гдѣ

$$\xi = \frac{-s_n + \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n},$$

$$\eta = \frac{-s_n - \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n}.$$

Принимая во вниманіе равенство (44), имѣемъ

$$\xi = \frac{-s_n + \sqrt{a_{2n}}}{r_n},$$

$$\eta = \frac{-s_n - \sqrt{a_{2n}}}{r_n}.$$

(45)

Когда $a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n$ не нуль, то ξ не равно η ,

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(\xi - \eta)} \frac{1}{y - \xi} + \frac{1}{r_n(\eta - \xi)} \frac{1}{y - \eta}. \quad (46)$$

Но по уравненіямъ (45)

$$r_n(\xi - \eta) = 2\sqrt{a_{2n}}.$$

Поэтому уравненіе (46) напишется такъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{a_{2n}}} \left(\frac{1}{y - \xi} - \frac{1}{y - \eta} \right).$$

Умножая на dy и интегрируя, получаемъ

$$\int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{2\sqrt{a_{2n}}} \lg \frac{y - \xi}{y - \eta}. \quad (47)$$

Подставляя въ уравненіе (40) значенія обоихъ интеграловъ, въ него входящихъ, изъ уравненій (41) и (47) и полагая

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \lg A,$$

гдѣ A новая произвольная постоянная, получимъ для случая, когда a_{2n} не равно нулю,

$$A \frac{y - \xi}{y - \eta} = \frac{2a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}. \quad (48)$$

Изъ этого уравненія ясно, что y есть раціональная функція p_1 и \sqrt{K} .

Если $a_{2n} = 0$, но a_{2n-1} не нуль, то по уравненію (45) $\xi = \eta$.

Уравненіе (46) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(y - \xi)^2}, \quad (49)$$

а уравненіе (47) слѣдующимъ

$$\int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{r_n(y - \xi)}, \quad (50)$$

на основаніи котораго, а равно и (42), выводимъ изъ (40)

$$\frac{2}{a_{2n-1}} \sqrt{K} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma. \quad (51)$$

Это уравнение тоже даетъ y въ рациональной функціи отъ p_1 и \sqrt{K} .

Для случая же, когда и $a_{2n-1} = 0$, послѣднее уравнение (51) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{p_1}{\sqrt{K}} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma, \quad (52)$$

тоже дающимъ, какъ и въ предыдущихъ двухъ случаяхъ, y въ рациональной функціи отъ p_1 и \sqrt{K} .

Но на основаніи §-а 2-ого мы имѣемъ

$$p_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad p_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{Y_n}{Y}, \quad (7)$$

гдѣ Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n цѣлыя функціи 2-ой степени относительно y . Слѣдовательно p_1, p_2, \dots, p_n выражаются рационально черезъ y , а такъ какъ, мы только что доказали, y выражается рационально черезъ p_1 и \sqrt{K} , то такимъ же образомъ выражаются p_1, p_2, \dots, p_n и всякая рациональная симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n , такъ какъ послѣдняя можетъ быть всегда рационально выражена черезъ p_1, p_2, \dots, p_n .

Послѣдняя теорема даетъ возможность доказать интересное свойство дифференціала $\frac{f(x)}{\sqrt{X}} dx$, допускающаго инвариантное преобразование.

Теорема IX-я.

Дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, допускающій инвариантное преобразование, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Не вводя термина: „инвариантное преобразование“, теорему можно формулировать такъ:

Если рациональная функція $f(x)$ такова, что x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяя системѣ дифференціальнымъ уравненій Якоби

Умножая обѣ части на $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$, имѣемъ

$$n \frac{f(x_1)}{F'(x_1)} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \right) \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \quad (53)$$

Но по теоремѣ VI (Ришло)

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{K}, \quad (29)$$

гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C, \quad (26)$$

или, такъ какъ $\frac{dx_1}{dt} = \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}$, то, по раздѣленіи на это послѣднее уравненіе,

$$\frac{dp_1}{dx_1} = F'(x_1) \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X_1}},$$

или

$$\frac{dp_1}{F'(x_1) \sqrt{K}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \quad (54)$$

По подстановкѣ этого выраженія въ уравненіе (53) получаемъ

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{F'(x_1)\sqrt{X_1}} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \right) \frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = R \frac{dp_1}{\sqrt{K}}, \quad (55)$$

гдѣ

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

есть раціональная симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n , и, слѣдовательно, раціональная функція отъ p_1, p_2, \dots, p_n . Но такая функція, по предыдущей теоремѣ VIII, выражается раціонально черезъ p_1 и \sqrt{K} .

Пусть

$$R = \varphi(p_1, \sqrt{K}).$$

Подставляя въ уравненіе (55), получаемъ

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(p_1, \sqrt{R}) \frac{dp_1}{\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \psi(p_1, \sqrt{K}) dp_1,$$

гдѣ ψ раціональная функція отъ p и \sqrt{K} .

Интегрируя обѣ части послѣдняго равенства, имѣемъ

$$\int \frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \psi(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}) dp_1. \quad (56)$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, берется въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логаримическія функціи

$$p_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{K} = \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}.$$

Въ получаемомъ по интегрированіи выраженіи

$$\Phi_1(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})$$

слѣдуетъ произвести замѣну

$$p_1 \quad \text{на} \quad \frac{Y_1}{Y}, \quad (\text{форм. 5})$$

$$\sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C} \quad \text{на} \quad A \frac{y - \xi}{y - \eta} - \frac{2a_{2n}Y_1 + a_{2n-1}Y}{2\sqrt{a_{2n}}Y}. \quad (\text{форм. 48})$$

Затѣмъ въ полученномъ выраженіи замѣнить Y на

$$Y = \frac{-S_1 + \sqrt{X_1}}{R_1}. \quad (24)$$

Тогда получимъ

$$\int \frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \Phi_2(x_1, \sqrt{X_1}) \quad (57)$$

въ видѣ суммы алгебраической раціональной функціи отъ x_1 и $\sqrt{X_1}$, и логаримовъ подобныхъ функцій.

Теперь переходимъ ко второму случаю, когда

$$p_1 = \text{const.},$$

и прежде всего замѣтимъ, что всегда существуютъ такія значенія a, b, c, d , при которыхъ

$$q_1^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_j x_i + b_j}{c_j x_i + d_j}$$

не равно постоянному.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$\frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 0, \quad \frac{dq_1^{(2)}}{dt} = 0, \dots, \quad \frac{dq_1^{(n)}}{dt} = 0$$

равносильны слѣдующимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(c_j x_i + d_j)^2} \frac{dx_i}{dt} = 0. \quad (\text{для } j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (58)$$

Очевидно, опредѣлитель этой системы уравненій не обращается въ нуль тождественно при всѣхъ $c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n$; если бы это предположеніе имѣло мѣсто, то

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = 0,$$

или

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \dots, \quad x_n = \text{const.},$$

а этотъ случай нами исключенъ (§ 1) изъ понятія инвариантнаго преобразованія.

Беремъ тѣ значенія для a, b, c, d , при которыхъ q_1 не равно постоянному.

На основаніи теоремы VII

$$\frac{dq_1}{dt_1} = V \bar{L}, \quad (32)$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \quad (33)$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma. \quad (34)$$

функціи отъ y_1, y_2, \dots, y_n , какъ p_1, p_2, \dots, p_n отъ x_1, x_2, \dots, x_n .
Примѣняя же теорему VIII къ уравненіямъ Якоби (31) или (37), заключаемъ, что $S = \chi(q_1, \sqrt{L})$ раціональная функція отъ q_1 и \sqrt{L} .

Изъ уравненія (62) имѣемъ

$$\frac{\Theta(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \chi(q_1, \sqrt{L}) \frac{dq_1}{\sqrt{L}},$$

откуда

$$\int \frac{\Theta(y_1)}{\sqrt{Y_1}} dy_1 = \int \omega(q_1, \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma}) dq_1, \quad (62)$$

гдѣ ω раціональная функція отъ

$$q_1 \text{ и } \sqrt{L} = \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma}.$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, выражается черезъ алгебраическія и логарифмическія функціи q_1 и \sqrt{L} .

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, сведемъ результатъ, получаемый по интегрированіи, къ функціи

$$\Phi_2(y_1, \sqrt{Y_1}).$$

Остается только замѣнить y_1 на

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \sqrt{Y_1} \text{ на } \frac{\sqrt{X_1}}{(cx_1 + d)^n}.$$

§ 5. Замѣтимъ, что систему дифференціальныхъ уравненій Якоби (1) на основаніи теоремы 2-ой можемъ замѣнить системой конечныхъ уравненій

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)}p_k + 2\gamma_1^{(k)}p_1 + 2\delta_1^{(k)}p_kp_1 + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + s_1^{(k)}p_1^2 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)}p_k + 2\gamma_n^{(k)}p_n + 2\delta_n^{(k)}p_kp_n + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + \varepsilon_n^{(k)}p_n^2 = 0.$$

Наиболѣе поддается изслѣдованію случай теоремы III, когда эти уравненія обращаются въ линейныя

$$p_l = L_l^{(k)}p_k + M_l^{(k)} \quad (l=1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \quad (19)$$

гдѣ, какъ мы доказали въ §-ѣ 2-омъ (Теорема III) $L_i^{(k)}$, $M_i^{(k)}$ могутъ имѣть только слѣдующія значенія

$$L_i^{(k)} = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k}, \quad (20)$$

$$M_i^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k}. \quad (21)$$

Такимъ образомъ получаемъ, какъ частный случай теоремы IX, слѣдующую теорему:

Теорема X.

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяя уравненіямъ

$$p_i = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k} p_k + \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k}, \quad (19)$$

удовлетворяютъ еще уравненіямъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)} &= 0, \\ \frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \dots + \frac{x_n}{f(x_n)} &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

то

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптической.

Эта теорема можетъ быть доказана и независимо отъ вышеизложеннаго, хотя тогда не на столько ясна связь ея съ теоріей Якобьевскихъ уравненій, а главное то, что она составляетъ частный случай болѣе общей теоремы.

Для доказательства разобьемъ

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{2n})$$

на два множителя

$$X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

$$X'' = (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \dots (x - \alpha_{2n}).$$

Тогда

$$X = a_{2n} X' X''.$$

Принимая обозначенія (17)

$$X' = x^n - \pi'_1 x^{n-1} + \pi'_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n \pi'_n, \quad (63)$$

$$X'' = x^n - \pi''_1 x^{n-1} + \pi''_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n \pi''_n, \quad (64)$$

мы имѣемъ тождества

$$\pi'_i = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k} \pi'_k + \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k},$$

$$\pi''_i = \frac{\pi'_i - \pi''_i}{\pi'_k - \pi''_k} \pi''_k + \frac{\pi'_k \pi''_i - \pi''_k \pi'_i}{\pi'_k - \pi''_k},$$

или, принимая обозначенія (20) и (21),

$$\pi'_i = L_i^{(k)} \pi'_k + M_i^{(k)}, \quad (65)$$

$$\pi''_i = L_i^{(k)} \pi''_k + M_i^{(k)}. \quad (66)$$

Подставляя эти выраженія π'_i, π''_i въ уравненія (63) и (64), получаемъ

$$\begin{aligned} X' = & x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \dots (-1)^{k-1} M_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ & + (-1)^k M_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} M_{n+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \dots (-1)^n M_n^{(k)} + \\ & + \pi'_k (-L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} - \dots (-1)^{k-1} L_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ & + (-1)^k L_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} L_{k+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \dots (-1)^n L_n^{(k)}), \end{aligned} \quad (67)$$

гдѣ

$$L_k^{(k)} = 1, \quad M_k^{(k)} = 0,$$

что вполне согласно съ формулами (20) и (21).

Полагая

$$x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \dots (-1)^n M_n^{(k)} = \mu, \quad (68)$$

$$-L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} + \dots + (-1)^n L_n^{(k)} = \lambda, \quad (69)$$

можно написать уравнение (67) и другое, такимъ же образомъ получаемое изъ (64), такъ

$$X' = \mu + \lambda \pi'_k, \quad (70)$$

$$X'' = \mu + \lambda \pi''_k. \quad (71)$$

Изъ уравненій (3) имѣемъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \dots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \quad (4)$$

откуда

$$\frac{nf(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

и

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F'(x_i)dx_1}{\sqrt{X_1}}. \quad (72)$$

Такъ какъ

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

раціональная симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n то она вмѣстѣ съ тѣмъ раціональная функція отъ p_1, p_2, \dots, p_n . Такъ какъ, по уравненіямъ (19), p_1, p_2, \dots, p_n суть раціональныя функціи отъ p_k , то и R есть такая же функція отъ p_k . Означимъ R черезъ $\varphi(p_k)$.

Преобразуемъ теперь уравненіе (72) или, что тоже, уравненіе

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = R \frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}. \quad (73)$$

На основаніи уравненій (19) имѣемъ

$$\begin{aligned} F'(x_1) &= nx_1^{n-1} - (n-1)p_1x_1^{n-2} + \dots + (-1)^n p_n = \\ &= nx_1^{n-2} - (n-1)M_1^{(k)}x_1^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}M_{n-1}^{(k)} + \\ &+ p_k(-L_1^{(k)}(n-1)x_1^{n-2} + (n-2)L_2^{(k)}x_1^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}L_{n-1}^{(k)}) = \\ &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_{x=x_1} + p_k \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \\ F'(x_1) &= \mu_1 + \lambda_1 p_k, \end{aligned} \quad (74)$$

гдѣ

$$\mu_1 = (\mu)_{x=x_1}, \quad \lambda_1 = (\lambda)_{x=x_1}.$$

Такъ какъ $F(x_1) = 0$, то $\mu_1 + \lambda_1 p_k = 0$, откуда

$$p_k = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}. \quad (75)$$

Подставляя въ уравненіе (74) это выраженіе p_k , имѣемъ

$$F'(x_1) = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}}{\lambda_1}. \quad (76)$$

Подставляя въ уравненіе (73) вмѣсто $X = a_{2n} X' X''$, на основаніи уравненій (70), (71),

$$a_{2n} (\mu_1 + \lambda_1 \pi'_k) (\mu_1 + \lambda_1 \pi''_k),$$

а вмѣсто $F'(x_1)$ его выраженіе (76) и опуская для краткости значки, имѣемъ

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{\varphi(p_k) \frac{\lambda \mu' - \lambda' \mu}{\lambda^2}}{\sqrt{a_{2n} \left(\pi'_k + \frac{\mu}{\lambda} \right) \left(\pi''_k + \frac{\mu}{\lambda} \right)}} dx,$$

или, по уравненію (75),

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\varphi(p_k) dp_k}{\sqrt{a_{2n} (\pi'_k - p_k) (\pi''_k - p_k)}}. \quad (77)$$

Отсюда

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = - \int \frac{\varphi(p_k) dp_k}{\sqrt{a_{2n} (\pi'_k - p_k) (\pi''_k - p_k)}}. \quad (78)$$

Такъ какъ интеграль, стоящій въ правой части этого уравненія (78), берется въ конечномъ видѣ, то тоже относится и къ интегралу

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}.$$

Послѣ совершенія интегрированія

$$\int \frac{\varphi(p_k) dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}}$$

въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить p_k на

$$-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Слѣдствіе.

Такъ какъ p_k есть симметрическая функція отъ x_1, x_2, \dots, x_n , то вторая часть равенства (77) будетъ оставаться равной одной и той же величинѣ при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$.

Значить

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{f(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}} = \dots = \frac{f(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \dots = \frac{f(x_n)}{F''(x_n)}, \quad (4)$$

то

$$\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{F'(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}} = \dots = \frac{F'(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}},$$

откуда выводятся уравненія Якоби (1).

Такимъ образомъ интегралы, о которыхъ идетъ рѣчь въ этой теоремѣ, суть именно тѣ, дифференціалы которыхъ допускаютъ инвариантное преобразование, и заключеніе это мы вывели независимо отъ сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ.

Примѣняя эту теорему къ случаю, когда $L_k^{(l)} = 0$ ($l \geq k$), что какъ мы показали въ теоремѣ IV будетъ только при

$$\pi'_l = \pi''_l \quad (l = 1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, n),$$

получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XI.

Если корни полинома

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{2n}),$$

гдѣ

$$\mu = x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n M_n^{(k)},$$

$$\lambda = -L_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n L_n^{(k)},$$

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

$$\pi'_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \pi''_1 = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\pi'_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \quad \pi''_n = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \alpha_{2n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}},$$

удовлетворяя условіямъ теоремы X-ой, опредѣляется по уравненіямъ (77) и (75) формулой

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

такъ какъ

$$\frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k \lambda + \mu)(\pi''_k \lambda + \mu)}} dx = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{X}} dx.$$

Обратно, если

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

то имѣютъ мѣсто уравненія (19) и (3).

Дѣйствительно, если уравненія (19) удовлетворяются при $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, то, какъ мы показали при доказательствѣ теоремы X,

$$\frac{\mu}{\lambda} = -p_k,$$

$$\int x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x} \right) \\ \varphi \left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}}, \\ \int \frac{d}{dx} \left(x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n M_n^{(n)} \right) \\ \varphi \left(x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + (-1)^n M_n^{(n)} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Для случая эллиптических интеграловъ формулы (80) даютъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, слѣдующую интересную форму псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, указанную Раффи.

А именно, въ формулѣ

$$\int \frac{x^2 - 2Lx - M}{x - L} \varphi \left(\frac{x^2 + M}{x - L} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (82)$$

(гдѣ для простоты откидываемъ значки) полагаемъ

$$\varphi \left(\frac{x^2 + M}{x - L} \right) = \Psi \left(\frac{\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\tilde{\xi}}{\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\eta} \right) \left(\frac{x^2 + M}{x - L} - 2\tilde{\xi} \right),$$

гдѣ $\tilde{\xi}$ и η корни уравненія

$$x^2 - 2Lx - M = 0, \quad (83)$$

такъ что

$$x^2 - 2Lx - M = (x - \tilde{\xi})(x - \eta), \quad (84)$$

$$\tilde{\xi} = L + \sqrt{L^2 + M},$$

$$\eta = L - \sqrt{L^2 + M}.$$

Но

$$\frac{x^2 + M - 2\tilde{\xi}(x - L)}{x^2 + M - 2\eta(x - L)} = \left[\frac{x - L - \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}} \right]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi \left(\frac{x^2 + M}{x - L} \right) = \frac{x - L}{(x - L - \sqrt{L^2 + M})^2} \chi \left(\frac{x - L - \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}} \right),$$

гдѣ χ означаетъ рациональную дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой четныя функціи.

Подставивъ это выраженіе функціи φ въ формулу (82) и производя сокращенія на основаніи формулы (84), получимъ псевдо-эллиптический интегралъ вида

$$\int \frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}} \chi \left(\frac{x - L + \sqrt{L^2 + M}}{x - L - \sqrt{L^2 + M}} \right) dx, \quad (85)$$

гдѣ $\chi(x)$ имѣеть вышеуказанное значеніе.

Замѣтимъ, что наши разсужденія имѣють силу не только въ томъ случаѣ, когда a_{2n} отлично отъ нуля, но и когда $a_{2n} = 0$ и полиномъ X нечетной степени

$$X = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-1}x^{2n-2} + \dots + a_1x + a_0, \quad (86)$$

причемъ мы пока предполагаемъ, что a_{2n-1} не равно нулю.

Положимъ

$$\begin{aligned} \varepsilon'_0 &= 1, & \varepsilon''_0 &= 1, \\ \varepsilon'_1 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n, & \varepsilon''_1 &= \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}, \\ \varepsilon'_2 &= \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, & \varepsilon''_2 &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}, \\ &\dots & & \dots \\ \varepsilon'_{n-1} &= \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n, & \varepsilon''_n &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \dots \alpha_{2n}. \end{aligned} \quad (87)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi'_l &= \varepsilon'_l + \alpha_1 \varepsilon'_{l-1} & \pi''_l &= \varepsilon''_l, \\ \frac{\pi'_l}{\alpha_1} &= \frac{\varepsilon'_l}{\alpha_1} + \varepsilon'_{l-1}, \\ \left[\frac{\pi'_l}{\alpha_1} \right]_{\alpha_1=\infty} &= \varepsilon'_{l-1}, & \left[\frac{\pi''_l}{\alpha_1} \right]_{\alpha_1=\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (88)$$

На этомъ основаніи для случая, когда $a_{2n} = 0$ или когда одинъ изъ корней, напримѣръ, $\alpha_1 = \infty$, получаемъ изъ формулъ (20) и (21)

$$L_i^{(k)} = \frac{\frac{\pi'_i}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}}{\frac{\pi'_k}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

$$M_i^{(k)} = \frac{\frac{\pi'_k}{\alpha_1} \pi''_i - \pi''_k \frac{\pi'_i}{\alpha_1}}{\frac{\pi'_k}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

откуда, при $\alpha_1 = \infty$,

$$L_i^{(k)} = \frac{\varepsilon'_{i-1}}{\varepsilon'_{k-1}}, \quad (89)$$

$$M_i^{(k)} = \frac{\varepsilon'_{k-1} \varepsilon''_{i-1} - \varepsilon''_k \varepsilon'_{i-1}}{\varepsilon'_{k-1}}. \quad (90)$$

Эти значенія $L_i^{(k)}$ и $M_i^{(k)}$ и слѣдуетъ, въ случаѣ полинома (86), подставить въ формулы (80) и (81).

Замѣтимъ еще, что наши разсужденія не предполагаютъ неравенства корней X ; корни X могутъ быть и кратными и радикаль \sqrt{X} можетъ привести къ виду

$$\begin{aligned} \sqrt{X} &= (b_x x^2 + b_{x-1} x^{x-1} + \dots + b_1 x + b_0) = \\ &= \sqrt{c_\beta x^\beta + c_{\beta-1} x^{\beta-1} + \dots + c_1 x + c_0}, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\beta + 2\alpha = 2n \quad \text{или} \quad \beta + 2\alpha = 2n - 1 \quad [\text{въ случаѣ } a_{2n} = 0].$$

§ 6. Интегралы Эйлера ¹⁾.

Интегралы Эйлера

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad (91)$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad (92)$$

¹⁾ Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776, m. IV, стр. 36.

входить, какъ довольно простой частный случай, въ первую изъ формулъ (81).

Первому интегралу соответствуетъ разложение на два множителя

$$1 + x^4 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1),$$

такъ что

$$M_2^{(1)} = \pi'_2 = \pi''_2 = 1 \quad L_2^{(1)} = 0,$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+1}{x} \right) \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^{-1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Къ интегралу (91) можно примѣнить подстановку

$$\frac{x^2+1}{x} = s \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2+1} = t. \quad (93)$$

Интегралу (92) соответствуетъ разложение

$$(1+x^4) = (x^2 + \sqrt{-2}x - 1)(x^2 - \sqrt{-2}x - 1),$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$M_2^{(1)} = \pi'_2 = \pi''_2 = -1,$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \left(\frac{x^2-1}{x} \right)^{-1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Этому интегралу соответствуетъ подстановка

$$\frac{x^2-1}{x} = s \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2-1} = t. \quad (94)$$

Замѣтимъ, что интегралъ (91) можетъ быть найденъ при помощи подстановки (94), а интегралъ (92) при помощи подстановки (93); только функція φ , входящая въ формулы (81), для этого случая будетъ много сложнѣе.

Дѣйствительно,

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x} \right)^2 + 4} \cdot \frac{x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-1}{x} \right)}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\left(\frac{x^2+1}{x} \right)^2 - 4} \cdot \frac{x \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+1}{x} \right)}{\sqrt{X}}.$$

Третій інтегралъ Эйлера тоже принадлежитъ къ изслѣдуемому классу и находится при помощи подстановокъ (93) и (94), если имѣть ввиду, что

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Отсюда или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}} + \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 4} \right] x \frac{d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}{\sqrt{X}},$$

или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} + \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 + 4} \right] x \frac{d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{\sqrt{X}}.$$

Интегралъ Реалиса

$$\int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4}} \quad (96)$$

служить обобщеніемъ этихъ трехъ интеграловъ Эйлера и тоже принадлежитъ къ типу интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (81), какъ ниже увидимъ изъ изслѣдованія интеграловъ Буняковского. частнымъ случаемъ которыхъ является интегралъ Реалиса.

Интегралы Буняковского.

Основаніемъ изслѣдованій Буняковского служитъ тотъ фактъ, что всякій эллиптическій интегралъ

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}} \quad (97)$$

¹⁾ Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{x + C_1}{x + C_2} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

и другихъ выраженій подобнаго вида. Приложение къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

приводится къ формѣ

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}} dx \quad (98)$$

подстановкой

$$x = \alpha y + \beta.$$

Псевдо-эллиптическими интегралами (97) по Буняковскому будут тѣ, для которыхъ

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

или, по терминологіи Буняковского, рациональная функція $f(x)$ есть функція возвратная знакопеременная.

Легко видѣть, что интегралы Буняковского подходятъ, какъ частный случай, подъ типъ интеграловъ Раффи.

Въ самомъ дѣлѣ, условія теоремы IX удовлетворены, ибо, если

$$x_1 x_2 = 1, \quad (99)$$

то, во первыхъ,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1^4 + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Ax_1 + 1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{x_2^4 + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + 1}} = 0,$$

и, во вторыхъ,

$$f(x_1) + f(x_2) = 0.$$

Такимъ образомъ, интегралъ (98) удовлетворяетъ условіямъ теоремы IX, а такъ какъ зависимость между x_1 и x_2 (99) типа (22), то онъ удовлетворяетъ и условіямъ теоремы XI, а потому заключается въ формулахъ (81).

Далѣе, если

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta,$$

$$x_2 = \alpha y_2 + \beta,$$

то, по леммѣ, при

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0,$$

имѣемъ также

$$\frac{dy_1}{\sqrt{Y_1}} + \frac{dy_2}{\sqrt{Y_2}} = 0;$$

кромѣ того, если

$$\varphi(y) = f(\alpha y + \beta),$$

то при

$$f(x_1) + f(x_2) = 0,$$

будемъ имѣть также

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = 0.$$

Интеграль (97) тоже допускаетъ инвариантное преобразование.

Такъ какъ, кромѣ того, обозначая

$$q_1 = y_1 + y_2,$$

$$q_2 = y_1 y_2,$$

имѣемъ

$$p_1 = \alpha q_1 + \beta \quad p_2 = \alpha q_2 + \alpha \beta q_1 + \beta^2,$$

то зависимость между q_1 и q_2 будетъ линейная, а по теоремѣ III не иначе, какъ типа (19). Интеграль (97) подходитъ подъ формулы (80).

Способъ интегрированія Буныковского или, вѣрнѣе, выводъ изъ изслѣдованнаго класса другого болѣе обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ можетъ быть излагаемъ въ болѣе общей формѣ, чѣмъ это дѣлаетъ Буныковский.

Изъ соотношенія [рав. (75) для $k=1$ и $n=2$]

$$p_1 = \frac{x^2 + M}{x - L}$$

опредѣляемъ x

$$x = \frac{p_1 \pm \sqrt{N}}{2},$$

гдѣ

$$N = p_1^2 - 4(Lp_1 + M), \quad (99)$$

такъ что

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{N}}{2},$$

$$x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{N}}{2},$$

$$F'(x_1) = x_1 - x_2 = \sqrt{N},$$

$$F'(x_2) = x_2 - x_1 = -\sqrt{N}.$$

СОДЕРЖАНІЕ.

	Стран.
Объ инвариантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ <i>Д. Мордухай-Болтовского</i>	1

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

	Pages.
Sur les transformations invariantes des intégrales ultraelliptiques; par <i>M. D. Mordoukay-Boltowsky</i>	1

Caric Hall
Sci 905.75

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-a série, Tome VIII, № 2 и 3.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 2 и 3.



ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.

(Рыбная улица, домъ № 30-й).

1902.



На основаніи § 9-го устава Харьковскаго Математическаго
Общества печатать разрѣшается: 17-го декабря 1903 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества *В. Стекловъ*.

Если $\varphi(x)$ означает рациональную функцию от x , то

$$\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{p_1 + \sqrt{N}}{2}\right) = \chi(p_1) + \omega(p_1)\sqrt{N}, \quad (100)$$

$$\varphi(x_2) = \varphi\left(\frac{p_1 - \sqrt{N}}{2}\right) = \chi(p_1) - \omega(p_1)\sqrt{N}, \quad (101)$$

$$\frac{\varphi(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{\chi(p_1) + \omega(p_1)\sqrt{N}}{\sqrt{X_1}} dx. \quad (102)$$

Но, по формулѣ (54),

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K_1}} = \frac{dp_1}{\sqrt{KN}} \quad (103)$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или, точнѣе,

$$K = a_{2n}(\pi'_1 - p_1)(\pi''_1 - p_1).$$

Принимая во вниманіе (99), заключаемъ, что $P = KN$ есть полиномъ четвертой степени относительно p_1 , какъ X_1 относительно x_1 .

На основаніи равенства (103), равенство (102) напишется такъ (опуская значки)

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\chi(p) dp}{\sqrt{P}} + \int \frac{\omega(p) dp}{\sqrt{K}}. \quad (104)$$

Второй интегралъ можетъ быть взятъ въ конечномъ видѣ; тоже будетъ относиться и къ

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{X}},$$

если

$$\chi(p) = 0,$$

т. е. [уравненія (100) и (101)] когда

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инвариантное преобразование.

Если $\chi(p)$ не равно нулю, то поступаемъ съ интеграломъ

$$\int \frac{\chi(p) dp}{\sqrt{P}}$$

совершенно также, какъ поступали съ интеграломъ

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{X}}.$$

Тогда, полагая

$$q_1 = p_1 + p_2,$$

гдѣ p_1 и p_2 удовлетворяютъ Эйлерову уравненію

$$\frac{dp_1}{\sqrt{P_1}} = - \frac{dp_2}{\sqrt{P_2}},$$

получимъ

$$\int \frac{\chi(p_1) dp_1}{\sqrt{P_1}} = \int \frac{\Theta(q_1) dq_1}{\sqrt{Q_1}} + \int \frac{\omega_1(q_1) dq_1}{\sqrt{L}},$$

гдѣ Q_1 полиномъ четвертой, L второй степени относительно q_1 , а $\Theta(q_1)$ и $\omega_1(q_1)$ нѣкоторыя рациональныя функціи отъ q_1 .

При $\Theta(q_1) = 0$, т. е. когда

$$\frac{\chi(p) dp}{\sqrt{P}}$$

допускаетъ инвариантное преобразование, получаемъ второй случай интегрируемости, такъ какъ оба интеграла, входящіе въ формулу (104), выражаются въ конечномъ видѣ

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\omega_1(q_1) dq_1}{\sqrt{L}} + \int \frac{\omega(p) dp}{\sqrt{K}}.$$

Въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить q черезъ p , p черезъ x .

Третій случай интегрируемости получимъ, производя тѣже дѣйствія надъ

$$\int \frac{\Theta(q) dq}{\sqrt{Q}}$$

и т. д.

Интегралы Малле ¹⁾.

Даемъ новыя доказательства двумъ теоремамъ Малле, относящимся къ псевдо-эллиптическимъ интеграламъ, принадлежащимъ, какъ ниже покажемъ, къ изслѣдуемому классу Раффи.

Теорема XIII.

Если положить

$$X = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)(1 + dx), \quad (105)$$

$$\lambda' = \frac{ab - cd}{cd(a + b) - ab(c + d)},$$

$$\lambda'' = \frac{ac - bd}{bd(a + c) - ac(b + d)}, \quad (106)$$

$$\lambda''' = \frac{ad - bc}{bc(a + d) - ad(b + c)},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{x - \lambda'} + \frac{1}{x - \lambda''} + \frac{1}{x - \lambda'''} \right] \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad (107)$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Положимъ

$$\frac{1}{a} = -\alpha_1, \quad \frac{1}{b} = -\alpha_2, \quad \frac{1}{c} = -\alpha_3, \quad \frac{1}{d} = -\alpha_4,$$

$$\sqrt{X_1} = \sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)} = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{abcd}}, \quad (109)$$

$$\lambda' = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4}{(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4)} = L_1^{(2)}, \quad (110)$$

или, опуская значки для краткости,

$$\lambda' = L, \quad \frac{dx}{(x - \lambda')\sqrt{X}} = \frac{dx}{(x - L)\sqrt{X}}.$$

Другія двѣ дроби, изъ суммы которыхъ (6) состоитъ разсматриваемый дифференціалъ (107), получаютъ такимъ же образомъ при двухъ другихъ дѣленіяхъ на двѣ группы корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ полинома X_1 . Обозначимъ значенія L въ трехъ подобныхъ случаяхъ черезъ L', L'', L''' .

¹⁾ Malet. Two theorems in integration (Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI, p. 252).

Полагая въ первой изъ формулъ (80) $n=2$, $\varphi=1$, получимъ

$$J = \int \frac{x^2 - 2Lx - M}{x - L} \frac{dx}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{x - L}{\sqrt{X_1}} dx - (M + L^2) \int \frac{dx}{(x - L)\sqrt{X_1}},$$

гдѣ J выражается черезъ

$$\lg \frac{P + Q\sqrt{X_1}}{P - Q\sqrt{X_1}},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи отъ x ¹⁾.

Отсюда получаемъ

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{x - L'} + \frac{1}{x - L''} + \frac{1}{x - L'''} \right) \frac{dx}{\sqrt{X_1}} = \\ & = \alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{X_1}} - \beta \int \frac{dx}{\sqrt{X_1}} + J' + J'' + J''', \end{aligned} \quad (111)$$

гдѣ J' , J'' , J''' представляютъ три логариема упомянутого типа, а

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{L'^2 + M'} + \frac{1}{L''^2 + M''} + \frac{1}{L'''^2 + M'''}, \\ \beta &= \frac{L'}{L'^2 + M'} + \frac{L''}{L''^2 + M''} + \frac{L'''}{L'''^2 + M'''} \end{aligned}$$

Черезъ простое вычисленіе легко убѣдиться, что

$$\begin{aligned} L'^2 + M'^2 &= (L' - L'')(L' - L''') = \varphi'(L'), \\ \text{гдѣ} \quad \varphi(L) &= (L - L')(L - L'')(L - L'''). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{\varphi'(L')} + \frac{1}{\varphi'(L'')} + \frac{1}{\varphi'(L''')} = 0, \quad (112)$$

$$\beta = \frac{L'}{\varphi'(L')} + \frac{L''}{\varphi'(L'')} + \frac{L'''}{\varphi'(L''')} = 0. \quad (113)$$

¹⁾ Это новый выводъ формулы Абеля для выраженія

$$\int \frac{k + k'x}{\sqrt{R}} dx \quad \text{черезъ} \quad \int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{R}} \quad \text{и логариемъ.}$$

На основаніи полученныхъ равенствъ (111), (112) и (113) и принимая во вниманіе (109) и (110), получимъ

$$\int \left(\frac{1}{x-\lambda'} + \frac{1}{x-\lambda''} + \frac{1}{x-\lambda'''} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{abcd}} \lg \frac{M + N\sqrt{X}}{M - N\sqrt{X}} + C, \quad (114)$$

гдѣ M и N цѣлыя функціи отъ x , которыя легко вычислить на основаніи вышесказаннаго.

Вторая теорема Малле состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема XIV.

Если положить

$$X = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx), \quad (115)$$

$$\mu' = \frac{bc}{a-b-c},$$

$$\mu'' = \frac{ac}{b-a-c}, \quad (116)$$

$$\mu''' = \frac{ab}{c-a-b},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{1-\mu'x} + \frac{1}{1-\mu''x} + \frac{1}{1-\mu'''x} \right] \frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (117)$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Эту теорему можно разсматривать, между прочимъ, какъ частный случай предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x = \frac{1}{z},$$

получаемъ

$$\sqrt{X} = \frac{\sqrt{Z}}{z^2},$$

гдѣ

$$Z = (z+a)(z+b)(z+c)(z),$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}} = \frac{dz}{z\sqrt{Z}}.$$

Дифференціалъ (117) преобразовывается въ слѣдующее выраженіе

$$-\left[\frac{1}{s-\mu'} + \frac{1}{s-\mu''} + \frac{1}{s-\mu'''} \right] \frac{ds}{\sqrt{Z}}, \quad (118)$$

гдѣ μ', μ'', μ''' выраженія (110) при

$$\alpha_1 = , -a, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = b \quad \alpha_4 = C.$$

Дифференціалъ (118) есть, въ сущности, частный случай (107).

Ограничиваясь разборомъ этихъ наиболѣе извѣстныхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, мы не будемъ заниматься составленіями имъ подобныхъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, что легко сдѣлать по формуламъ (80). Но въ заключеніе приведемъ примѣръ одного дифференціала довольно общаго характера, допускающаго инвариантное преобразование. Предположимъ, что дифференціалъ $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$ таковъ, что

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} \lg \frac{-S + \sqrt{X}}{-S - \sqrt{X}} + C$$

и

$$S^2 - X = \alpha, \quad (119)$$

гдѣ α постоянное, или, что тоже

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{X}} = \lg \frac{-S + \sqrt{X}}{R} + C, \quad (120)$$

гдѣ R постоянное, которое затѣмъ надлежащимъ образомъ выберемъ.

Равенство (119) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = X, \quad (11)$$

гдѣ полагаемъ

$$T = 1, \quad R = \alpha. \quad (121)$$

Тогда уравненіе

$$\frac{-S + \sqrt{X}}{R} = y,$$

при условіи (11), будетъ опредѣлять рѣшенія x_1, x_2, \dots, x_n системы дифференціальныхъ уравненій Якоби

гдѣ ϱ и σ цѣлыя функціи степени не выше n -ой каждая, заключаются въ формулахъ (80).

Положимъ

$$\eta = \frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}.$$

Тогда интегралъ (123) обратится въ другой интегралъ того же типа

$$\int \frac{\Psi(\eta) d\eta}{V a\eta^2 + b\eta + c},$$

$$\eta = \frac{\alpha\varrho + \beta\sigma}{\gamma\varrho + \delta\sigma}.$$

Полагая

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho_n x^n + \varrho_{n-1} x^{n-1} + \dots + \varrho_1 x + \varrho_0, \\ \sigma &= \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} + \dots + \sigma_1 x + \sigma_0,\end{aligned}\tag{125}$$

выберемъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned}\alpha\varrho_n + \beta\delta_n &= 1, \\ \alpha\varrho_{n-k} + \beta\delta_{n-k} &= 0, \\ \gamma\varrho_n + \delta\sigma_n &= 0, \\ \gamma\varrho_{n-k} + \delta\sigma_{n-k} &= (-1)^k.\end{aligned}\right\}\tag{126}$$

При нѣкоторыхъ значеніяхъ k можно опредѣлить $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, ибо не можетъ для всѣхъ значеній k опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varrho_n & \sigma_{n-1} \\ \varrho_k & \sigma_{n-k} \end{vmatrix}$$

равняться нулю или, что тоже, не могутъ имѣть равенства

$$\frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{\varrho_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = \dots = \frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho_0}{\sigma_0},$$

ибо тогда

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \text{const.}$$

Слѣдовательно, если $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ приводится къ дифференціалу

$$\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$$

подстановкой $\xi = \frac{\rho}{\sigma}$, гдѣ ρ , σ имѣютъ значенія (125), то тотъ же дифференціалъ приводится къ

$$\frac{\Psi(\eta)d\eta}{\sqrt{A'\eta^2 + B'\eta + C'}}$$

подстановкой

$$\eta = \frac{\rho'}{\sigma'},$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho'_n x^n + \rho'_{n-1} x^{n-1} + \dots + \rho'_1 x + \rho'_0, \\ \sigma' &= \sigma'_n x^n + \sigma'_{n-1} x^{n-1} + \dots + \sigma'_1 x + \sigma'_0, \\ \sigma'_n &= 0, \quad \rho'_n = 1, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k, \quad \rho'_{n-k} = 0.\end{aligned}\quad (127)$$

Положимъ сперва A' отличнымъ отъ нуля. Тогда

$$A'\eta^2 + B'\eta + C' = A'(\eta + \alpha)(\eta + \beta),$$

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sigma' \varphi\left(\frac{\rho'}{\sigma'}\right) \frac{d\left(\frac{\rho'}{\sigma'}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}} \sqrt{(\rho + \sigma\alpha)(\rho + \sigma\beta)}} dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(\rho' + \sigma'\alpha)(\rho' + \sigma'\beta)}}{\sqrt{X}} &= \text{раціональной функціи отъ } x, \text{ или} \\ \omega_1^2 (\rho' + \sigma'\alpha)(\rho' + \sigma'\beta) &= \omega_2^2 X,\end{aligned}\quad (128)$$

гдѣ ω_1 и ω_2 цѣлые полиномы, которые можно предположить взаимно-простыми.

Если предположить, что у полинома X нѣтъ кратныхъ корней, а потому X не можетъ дѣлиться на квадратъ ω_1^2 , то

$$\omega_1 = 1.$$

Такъ какъ $(\rho + \sigma\alpha)(\rho + \sigma\beta)$ той же степени, что и X въ случаѣ, если X степени $2n$ -ая, т. е. a_{2n} не равно нулю, то $\omega_2^2 = \text{const.}$ Сравнивая при этомъ коэффициенты при высшихъ степеняхъ, получаемъ

$$\omega_2^2 = a_{2n}.$$

Въ случаѣ $a_{2n} = 0$, равенства (121) быть не можетъ при конечныхъ значеніяхъ α и β , ибо въ лѣвой части полиномъ четной степени, въ правой нечетной.

Полагая же $A' = 0$ [или, что то же, $\beta = \infty$, $A'\beta = B'$], получимъ

$$B'(\rho' + \sigma'\alpha)\sigma' = X, \quad (129)$$

равенство возможное только въ случаѣ $a_{2n} = 0$.

Изъ тождества (128), которое по вышедоказанному можно написать такъ

$$\begin{aligned} (\rho' + \sigma'\alpha)(\rho' + \sigma'\beta) &= X = \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}) \dots (x - \alpha_{2n}), \end{aligned} \quad (130)$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} \rho'_n + \sigma'_n \alpha &= 1, \quad \rho'_n + \sigma'_n \beta = 1, \\ \rho'_{n-1} + \sigma'_{n-1} \alpha &= -\pi'_1, \quad \rho'_{n-1} + \sigma'_{n-1} \beta = -\pi''_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \rho'_{n-k} + \sigma'_{n-k} \alpha &= (-1)^k \pi'_k, \quad \rho'_{n-k} + \sigma'_{n-k} \beta = (-1)^k \pi''_k, \\ &\dots \dots \dots \\ \rho'_0 + \sigma'_0 \alpha &= (-1)^n \pi'_n, \quad \rho'_0 + \sigma'_0 \beta = (-1)^n \pi''_n. \end{aligned}$$

Легко видѣть, что изъ этихъ условій при значеніяхъ $\sigma'_n, \rho'_n, \sigma'_{n-k}, \rho'_{n-k}$ (127) получаемъ

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi'_k, \quad \beta = \pi''_k \\ \rho'_{n-k} &= (-1)^k M_i^{(k)}, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k L_i^{(k)}, \end{aligned} \quad (131)$$

гдѣ $M_i^{(k)}, L_i^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Исходя изъ тождества (129), придемъ къ тому же результату (131), только $L_i^{(k)}, M_i^{(k)}$ будутъ имѣть значенія не (20) и (21), а (89) и (90).

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XV.

Всякій интегралъ $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$ рациональной подстановкой $\xi = \frac{\rho}{\sigma}$, гдѣ ρ и σ полиномы каждый сте-

Такимъ образомъ выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI.

Всякій интеграль $\int \frac{f(x)dx}{VX}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$ подстановкой $\xi = \frac{\rho}{\sigma}$, гдѣ ρ и σ полиномы какой угодно степени, принадлежитъ къ классу псевдо-ультразлиптическихъ интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (80), но относящимися не къ VX , а къ $V\Phi$, гдѣ $\Phi = \Theta^2 X$, а Θ нѣкоторая цѣлая функція, и дифференціаль $\frac{f(x)dx}{VX}$ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ всегда можетъ быть представленъ въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)dx}{V\Phi}$, допускающаго инвариантное преобразование.

Къ этому типу интеграловъ принадлежатъ всѣ интегралы вида

$$\int \frac{\rho dx}{VX},$$

гдѣ ρ цѣлая функція $(n-1)^{\text{ой}}$ степени, X цѣлая функція $2n^{\text{ой}}$ степени, интегрируемые въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изслѣдованія Чебышева ¹⁾ показываютъ, что если интеграль $\int \frac{\rho dx}{VX}$ находится въ конечномъ видѣ, то

$$\int \frac{\rho dx}{VX} = \beta \lg \left(\frac{-S + \Theta \sqrt{X}}{-S - \Theta \sqrt{X}} \right) + C, \quad (137)$$

гдѣ

$$S^2 - \Theta^2 X = \alpha,$$

а α и β постоянныя, или на основаніи этого послѣдняго равенства

$$\int \frac{\rho dx}{VX} = \beta \lg \left(\frac{-S + \Theta \sqrt{X}}{R} \right) + C,$$

гдѣ R какое угодно постоянное, напримѣръ,

$$R = \alpha.$$

¹⁾ П. Л. Чебышевъ. Объ интегрированіи ирраціональныхъ дифференціаловъ. Сочиненія, т. I, ст. 145.

Равенство (136) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = \Theta^2 X,$$

гдѣ

$$R = \alpha, \quad T = -1,$$

или

$$S^2 - RT = \Phi. \quad (138)$$

Изъ этого послѣдняго равенства и изъ (137), представленнаго въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\psi(x) dx}{\sqrt{\Phi}} = \beta \lg \left(\frac{-S + \sqrt{\Phi}}{R} \right) + C, \quad (139)$$

выводимъ такимъ же образомъ, какъ въ концѣ §-а 6-ого изъ (120) и (11) вывели совмѣстное существованіе уравненій (1) и (122), слѣдующую теорему:

Теорема XVII.

Всякій дифференціалъ $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$, въ которомъ ϱ цѣлая функція $(n-1)$ -ой степени, X полиномъ $2n$ -ой степени безъ кратныхъ корней, можетъ быть представленъ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ , въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x) dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инвариантное преобразованіе и при томъ типа (22).

Такимъ образомъ, первый случай интегрируемости $\frac{\varrho dx}{\sqrt{X}}$ будетъ тотъ, когда

$$\pi'_i = \pi''_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

второй, когда корни полинома $(x-a)^2 X$ удовлетворяютъ подобнымъ соотношеніямъ, третій, когда тоже относится къ корнямъ полинома $(x-a)^2 (x-b)^2 X$ и т. д.

Изъ этихъ соотношеній можемъ, во первыхъ, опредѣлить $n-1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять корни полинома X , и затѣмъ неизвѣстныя a, b, c, \dots , корни полинома Θ . По этимъ послѣднимъ, на основаніи сказаннаго въ концѣ §-а 6-ого, можно опредѣлить $\psi(x)$ и, наконецъ, ϱ .

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы исключительно говорили о приведеніи $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{A\xi^2 + R\xi + C}} d\xi$ при помощи раціональной подстановки.

Приведеніе $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \psi(\xi, \sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}) d\xi$ при инвариантномъ преобразованіи (13) совершается при помощи подстановки

$$\frac{M_k + N_k \sqrt{X_i}}{M_1 + N_1 \sqrt{X_i}} = p_k,$$

гдѣ M_k, N_k, M_1, N_1 цѣлыя функціи отъ x . Подстановка эта въ общемъ случаѣ ирраціональна.

Но тотъ же интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональной дроби подстановкой

$$y = \frac{-S + \sqrt{X}}{R},$$

гдѣ S, R цѣлыя функціи отъ x (10), такъ какъ p_k выражается раціонально въ y по формуламъ (5); на основаніи тѣхъ же формулъ $dp_k = \Theta(y)dy$, гдѣ $\Theta(y)$ раціональная функція отъ y ; наконецъ, по формуламъ (48) и (51), \sqrt{X} выражается также раціонально черезъ y .

Отсюда на основаніи того, что

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \int \psi(p, \sqrt{R}) dp, \quad (56)$$

получаемъ

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \int A(y)dy,$$

гдѣ $A(y)$ раціональная функція отъ y .

Въ частномъ случаѣ, когда инвариантное преобразованіе линейнаго характера (19), можно положить (см. доказательство теоремы III)

$$S = 0,$$

$$-RT = X,$$

и $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ приведется къ $\int A(y)dy$ подстановкой

$$\frac{\sqrt{X}}{R} = y, \quad (140)$$

или

$$\sqrt{X} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) y, \quad (141)$$

представляющей обобщение третьей подстановки Эйлера

$$\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = (x - \alpha_1) y.$$

Раффи замѣчаетъ, что всякое Якобьевское преобразование, совершенное надъ эллиптическимъ дифференціаломъ, допускающимъ инвариантное преобразование, даетъ другой эллиптический дифференціалъ, допускающій инвариантное преобразование.

Производя преобразование $z = x^3$ надъ дифференціаломъ

$$\frac{f(z) dz}{2k_1 k_2 \sqrt{z \left(z - \frac{1}{k_1^2}\right) \left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}, \quad (142)$$

получимъ

$$\frac{f(x^3) dx}{\sqrt{(1 - k_1^2 x^2)(1 - k_2^2 x^2)}}. \quad (143)$$

Если

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k_1^2 k_2^2 z}\right) &= -f(z), \\ f\left(\frac{1 - k_2^2 z}{k_2^2(1 - k_1^2 z)}\right) &= -f(z), \\ f\left(\frac{1 - k_1^2 z}{k_1^2(1 - k_2^2 z)}\right) &= -f(z), \end{aligned} \quad (144)$$

то [на основаніи формулъ (89), (90)] дифференціалъ (142) допускаетъ инвариантное преобразование (19).

Слѣдовательно, дифференціалъ (143) будетъ допускать инвариантное преобразование, если

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k_1^2 k_1^2 x^2}\right) &= -f(x^2), \\ f\left(\frac{1 - k_2^2 x^2}{k_2^2(1 - k_1^2 x^2)}\right) &= -f(x^2), \\ f\left(\frac{1 - k_1^2 x^2}{k_1^2(1 - k_2^2 x^2)}\right) &= -f(x^2). \end{aligned} \quad (145)$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = k$ получимъ формулы, упомянутыя въ началѣ статьи.

Замѣтимъ, что первому случаю (145) соотвѣтствуетъ инвариантное преобразование тоже линейнаго характера, но въ двухъ другихъ случаяхъ это преобразование будетъ типа (13) со второй степенью p_1 .

Такимъ образомъ, дифференціалъ (143), какъ допускающій инвариантное преобразование, по теоремѣ IX интегрируется въ конечномъ видѣ. Этотъ результатъ, полученный Эрмитомъ, подробно доказывается Раффи въ вышеупомянутой статьѣ.

Къ изложенному Раффи съ своей стороны прибавимъ, что изъ его изслѣдованій можно вывести и подстановки, при помощи которыхъ интегралы Эрмита приводятся къ интеграламъ отъ рациональныхъ дробей. Стоитъ только въ формулѣ (140) положить $R = z$, $R = z - \frac{1}{k_1^2}$ и $R = z - \frac{1}{k_2^2}$.

Треть случаи (144) соотвѣтствуютъ три подстановки

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}{z} &= y, \\ \frac{\sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}{z - \frac{1}{k_1^2}} &= y, \\ \frac{\sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}{z - \frac{1}{k_2^2}} &= y, \end{aligned} \quad (146)$$

при помощи которыхъ интегралъ

$$\int \frac{f(z) dz}{2k_1 k_2 \sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}$$

приводится къ интегралу отъ рациональной дроби $\int A(y) dy$.

Къ $\int A(y) dy$ приведется интегралъ

$$\int \frac{f(x^2) dx}{\sqrt{(1 - k_1^2 x^2)(1 - k_2^2 x^2)}}, \quad (147)$$

при условіяхъ (145), причемъ зависимости между y и x получимъ, замѣнивъ въ уравненіяхъ (146) z на x^2 .

Отбрасывая постоянные множители, не имѣющіе очевидно, значенія, получимъ три Эрмитовскія подстановки, приводящія интегралъ (147) къ интегралу отъ рациональной дроби,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(1-k_1^2 x^2)(1-k_2^2 x^2)}}{x} &= p, \\ \frac{x \sqrt{1-k_2^2 x^2}}{\sqrt{1-k_1^2 x^2}} &= p, \\ \frac{x \sqrt{1-k_1^2 x^2}}{\sqrt{1-k_2^2 x^2}} &= p. \end{aligned} \tag{148}$$

Въ частномъ случаѣ для Эйлеровыхъ интеграловъ (91) и (92), гдѣ $k_1^2 = i$, $k_2^2 = -i$,

$$f\left(\frac{1}{k_1^2 k_1^2 x^2}\right) = -f(x^2),$$

получаемъ подстановку

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}} = p,$$

указанную еще Эйлеромъ.

LE PROBLÈME MATHÉMATIQUE DES VIBRATIONS UNIVERSELLES.

Par A. Korn.

Le problème „des vibrations universelles“ me parait, après le problème de Dirichlet, le problème mathématique le plus important pour la physique, parce qu'il sera à l'avenir le fondement des théories, qui expliquent les forces apparentes à distance d'une manière purement mécanique.

Il s'agit de la question suivante:

Nous supposons dans un continu infini, qui se comporte, du moins, quand il s'agit de mouvements rapides, comme un liquide parfait, un nombre quelconque de particules faiblement compressibles; en appelant u , v , w les vitesses d'un point (x, y, z) quelconque du système (supposées continues dans tout l'espace et s'annulant à l'infini), peut-on démontrer l'existence d'une vibration de la forme

$$\begin{aligned}u &= U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\v &= V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\w &= W \sin \frac{t}{T} 2\pi,\end{aligned}\tag{1}$$

où T représente une durée très petite; il faut ajouter que U , V , W , quoique assez grandes, ne doivent pas être de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de la vitesse, ni

$$\frac{dU}{dt}, \quad \frac{dV}{dt}, \quad \frac{dW}{dt}$$

de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de l'accélération.

Quelles sont les valeurs possibles de T , et comment peut-on trouver les fonctions correspondantes U, V, W ?

Une première analyse des équations du mouvement de notre système nous mène au résultat suivant:

Il faut que

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ V &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ W &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3 a)$$

à l'extérieur,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (3 b)$$

à l'intérieur des particules, où

$$k^2 = 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2} \quad (4)$$

(α^2 une constante dépendant de la compressibilité des particules), et Φ doit être continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini comme un potentiel.

Les domaines i et e , c'est ainsi que je désignerai l'intérieur et l'extérieur des particules, étant donnés, il s'agit de démontrer l'existence de solutions Φ, k et de trouver des méthodes pour obtenir ces solutions dans les cas les plus importants pour la physique. Voilà ce que j'appelle le problème mathématique des vibrations universelles.

Pour la première partie de notre tâche, concernant l'existence des solutions, nous pouvons nous servir d'une méthode analogue à celle imaginée par M. Poincaré ¹⁾ à l'occasion du problème:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

à l'intérieur d'une surface fermée ω ,

$$\Phi = 0 \quad \text{à la surface } \omega;$$

¹⁾ H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894.

mais il est à remarquer que ces deux problèmes diffèrent en bien des points, comme on verra déjà par l'exemple le plus simple, par le cas d'une sphère. A cause de ces divergences il m'a paru utile de donner la démonstration complète pour l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots, k_j^2, \dots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_j, \dots,$$

qui représentent des solutions de notre problème, dans la première partie de cet ouvrage.

Dans la deuxième partie nous traiterons des méthodes, par lesquelles on peut obtenir ces solutions dans les cas les plus simples et en même temps les plus importants pour la physique, c'est-à-dire quand les particules sont de petites sphères dont les rayons sont assez petits en comparaison avec leurs distances. Le problème d'une seule sphère trouve sa solution complète à l'aide des fonctions de Bessel, pour le problème de plusieurs sphères nous démontrerons une méthode, analogue à celle de Murphy pour le problème analogue de l'électrostatique. J'ai déjà fait usage de cette méthode dans ma théorie du frottement dans les masses continues ¹⁾, mais sans donner une démonstration de cette méthode, évidente au premier aspect comme celle de Murphy. Mais comme on ne doit pas toujours se fier à ces évidences apparentes, il m'a paru nécessaire de combler cette lacune et de démontrer la méthode en question avec toute la rigueur nécessaire. On sait que des méthodes analogues existent pour les problèmes les plus différents de la physique théorique; nous retrouvons ici un des instruments les plus puissants de l'analyse mathématique.

¹⁾ A. Korn, Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, 1901. (Ferd. Dümmlers Verlag).

PREMIÈRE PARTIE.

LES THÉORÈMES D'EXISTENCE ET LES FONCTIONS UNIVERSELLES.

CHAPITRE I.

COROLLAIRE D'UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

§ 1. En m'appuyant sur un théorème de M. Poincaré, que j'ai démontré récemment dans toute sa généralité ¹⁾, je me propose de démontrer le lemme suivant:

Soient f_1, f_2, \dots, f_p p fonctions continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace sur lesquelles nous ferons la seule supposition qu'elles soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_p f_p = 0$$

dans tout l'espace, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1,$$

et qu'elles aient toutes les qualités de potentiels à l'extérieur d'une surface fermée ω de courbure continue, qui peut se composer de plusieurs nappes séparées; on peut toujours (pour un nombre p assez grand) trouver p constantes réelles

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

de manière que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1 \quad (5)$$

et que la fonction

$$\varphi = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_p f_p \quad (6)$$

satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\int_{i+\epsilon} \varphi^2 d\tau}{\int_{i+\epsilon} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau} \leq \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}} \quad (7)$$

¹⁾ Abhandlungen zur Potentialtheorie, № 4, p. 6, Berlin 1902. (Ferd. Dümmler's Verlag).

²⁾ On peut aussi bien écrire $\leq \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{p^2}}$.

où a^2 représente une constante finie ne dépendant que de la forme de la surface ω et tout à fait indépendante des fonctions f_1, f_2, \dots, f_p .

§ 2. La démonstration à l'aide du théorème de M. Poincaré est extrêmement facile; on peut d'après ce théorème toujours obtenir l'inégalité

$$\frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_i \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau} \leq \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}$$

et d'autant plus l'inégalité (7), puisque

$$\frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_{i+} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau} \leq \frac{\int_i \psi^2 d\tau}{\int_i \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau}.$$

CHAPITRE II.

SOLUTION D'UN PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL.

§ 1. Nous nous occuperons maintenant d'un problème très général, que nous énoncerons de la manière suivante:

Soient f et φ deux fonctions continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur d'une surface ω de courbure continue (qui peut se composer de plusieurs nappes séparées) et $\varphi \neq 0$.

On cherche une fonction U , continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, qui satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f, \quad (8)$$

et qui a toutes les qualités d'un potentiel à l'extérieur de ω (k^2 un nombre positif quelconque donné d'avance).

Nous formons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_i f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\tau}{r}, \\ u_j(x, y, z) &= +\frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 u_{j-1}(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\tau}{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

($j=1, 2, 3 \dots$)

r étant la distance du point (x, y, z) d'un élément $d\tau$ (ξ, η, ζ) ; alors on a

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= f, \\ \Delta u_1 &= -\varphi^2 u_0, \\ \Delta u_2 &= -\varphi^2 u_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta u_j &= -\varphi^2 u_{j-1}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}\tag{10}$$

à l'intérieur de ω .

S'il était possible de démontrer que

$$\lim_{j=\infty} u_j = 0,$$

et que la série

$$u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \dots$$

représente une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, on pourrait affirmer que cette fonction est une solution de notre problème.

Avant d'analyser ces questions de convergence à l'aide de la méthode connue de M. Poincaré, il nous faut démontrer quelques propriétés des fonctions u_0, u_1, u_2, \dots

§ 2. Supposons qu'il y ait entre les $p + 1$ fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_p$$

une relation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p = 0,\tag{11}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1\tag{12}$$

(p un nombre entier et fini).

Nous allons d'abord démontrer que l'on peut toujours déduire de (11) une relation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,\tag{13}$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1,\tag{14}$$

dans ces trois cas:

on n'a qu'à poser

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p = X + iY,$$

à multiplier l'équation (18) par $(X - iY)$ et à intégrer sur le domaine intérieur de ω pour arriver à la relation

$$\begin{aligned} - \int_{i+s} \left[\frac{\partial(X - iY)}{\partial x} \frac{\partial(X + iY)}{\partial x} + \frac{\partial(X - iY)}{\partial y} \frac{\partial(X + iY)}{\partial y} + \frac{\partial(X - iY)}{\partial s} \frac{\partial(X + iY)}{\partial s} \right] d\tau \\ = - (x_1 + ix_2) \int_i \varphi^2 (X^2 + Y^2) d\tau, \end{aligned}$$

qui mène, comme le premier membre est réel et $x_2 \neq 0$, au résultat

$$\int_i \varphi^2 (X^2 + Y^2) d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p = 0, \quad (19)$$

ou, par l'opération Δ ,

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0. \quad (20)$$

Si l'équation (15b) a une racine réelle et négative

$$x = -x_0^2,$$

on trouve en multipliant (18) par

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p$$

et en intégrant sur le domaine intérieur de ω

$$\begin{aligned} - \int_{i+s} \sum \left[\frac{\partial(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p)}{\partial x} \right]^2 d\tau \\ - x_0^2 \int_i \varphi^2 (\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p)^2 d\tau = 0, \end{aligned}$$

et on arrive de nouveau aux résultats (19) et (20), parce que le premier membre de cette équation se composerait de termes négatifs, qui devraient tous s'annuler.

Si enfin l'équation (15b) a une racine double que nous pouvons du reste supposer réelle et positive

$$x = \bar{x},$$

on peut déterminer les p constantes $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-2}, b$ de façon qu'elles satisfassent aux équations

$$\begin{aligned} b\delta_0 &= \gamma_0, \\ b\delta_1 &= \gamma_1 + b\bar{x}\delta_0, \\ b\delta_2 &= \gamma_2 + b\bar{x}\delta_1, \\ &\dots\dots\dots \\ b\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\bar{x}\delta_{p-3}, \\ 0 &= \gamma_{p-1} + b\bar{x}\delta_{p-2}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_{p-2}^2 &= 1, \end{aligned} \tag{21}$$

et l'équation (17) devient

$$F - 2\bar{x}F_1 + \bar{x}^2F_2 = 0, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} F &= \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\ F_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_i \frac{\varphi^2 F'}{r} d\tau, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_i \frac{\varphi^2 F_1'}{r} d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

De (22) et (23) on tire

$$\Delta F + 2\bar{x}\varphi^2 F - \bar{x}^2\varphi^2 F_1 = 0$$

à l'intérieur de ω ; en multipliant par $(-F_1)d\tau$ et en intégrant sur i on obtient ¹⁾

$$\int_i \varphi^2 (F^2 - 2\bar{x}FF_1 + \bar{x}^2F_1^2) d\tau = 0,$$

¹⁾ On a

$$\int_i F_1 \Delta F d\tau = \int_i F \Delta F_1 d\tau = - \int_i \varphi^2 F^2 d\tau.$$

d'où

$$F - xF_1 = 0, \quad (24)$$

une équation de la forme

$$I_0 u_0 + I_1 u_1 + \dots + I_{p-1} u_{p-1} = 0,$$

I_0, I_1, \dots, I_{p-1} étant des constantes auxquelles on peut encore imposer la condition

$$I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_{p-1}^2 = 1.$$

Nous avons ainsi démontré la proposition que l'on peut toujours réduire l'équation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p = 0$$

à une équation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_m u_m = 0, \quad (m \leq p) \quad (25)$$

dans laquelle $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ représentent des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_m^2 = 1 \quad (26)$$

et possédant la propriété, que l'équation

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_m x^m = 0 \quad (27)$$

admet m racines positives et simples.

Désignons ces racines par x_1, x_2, \dots, x_m , on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(parce qu'il n'y a pas de racines multiples), et on pourra, à l'aide des m relations

ou

$$U_j \neq 0;$$

dans le dernier cas il faut aussi que le x_j correspondant soit $\neq 0$.

La première équation (28) nous apprend donc que l'on pourra toujours tirer d'une équation de la forme (11) la conclusion suivante: On aura

$$u_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n, \quad (n \geq 1)$$

U_1, U_2, \dots, U_n étant des fonctions, continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à des équations

$$\Delta U_j = -\frac{1}{x_j} \varphi^2 U_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω ; les x_j sont des nombres positifs, différents de zéro, satisfaisant à l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p = 0. \quad (35)$$

On peut toujours en conséquence de la supposition (11) affirmer que la fonction

$$U = - \sum_{j=1}^n \frac{\frac{1}{x_j}}{k^2 - \frac{1}{x_j}} U_j \quad (36)$$

représente une solution de notre problème

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f \quad (\text{à l'intérieur de } \omega),$$

$$\Delta U = 0 \quad (\text{à l'extérieur de } \omega),$$

pourvu que $k^2 \neq \frac{1}{x_j}$.

La solution (36) a, comme fonction de k^2 , n pôles simples

$$k^2 = \frac{1}{x_j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

¹⁾ Pour f on trouvera la relation

$$f = -\varphi^2 \sum_{j=1}^n \frac{U_j}{x_j}.$$

Supposons qu'il y ait une autre solution U' de notre problème; il faut alors que la fonction $U' - U$, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfasse à la condition

$$\Delta(U' - U) = -k^2 \varphi^2 (U' - U) \quad (\text{à l'intérieur de } \omega), \quad (37)$$

et qu'elle ait toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω .

§ 3. Supposons maintenant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p = 0,$$

p étant un nombre fini, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_p^2 = 1.$$

Nous formerons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int [\alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1})] \frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= +\frac{1}{4\pi} \int \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \quad (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (38)$$

p étant un nombre entier et fini, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1.$$

Nous allons, d'une manière analogue à la méthode connue de M. Poincaré, démontrer que l'on peut (en prenant p assez grand) choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ de façon que

$$\text{abs.}(k^{2j} w_j) < A \cdot L^j, \quad (39)$$

si A représente une constante finie, L satisfait à la condition

$$0 < L < 1;$$

k^2 peut être un nombre aussi grand que l'on veut, mais donné à l'avance.

L'inégalité (39) une fois démontrée, on pourra affirmer que la fonction

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \dots \quad (40)$$

représente une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \quad (41)$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω .

Nous chercherons pour la démonstration de notre proposition une limite supérieure pour le quotient

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau},$$

m étant un nombre entier et fini quelconque, mais donné à l'avance.

On a évidemment

$$\begin{aligned} \int_{i+} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau &= - \int_i w_m \Delta w_m d\tau \\ &\leq \sqrt{\int_i w_m^2 d\tau} \sqrt{\int_i (\Delta w_m)^2 d\tau} \leq \max. \varphi^2 \sqrt{\int_i w_m^2 d\tau} \sqrt{\int_i w_{m-1}^2 d\tau}, \end{aligned}$$

en désignant par $\max. \varphi^2$ la plus grande valeur que φ^2 puisse avoir; donc

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \leq (\max. \varphi^2)^2 \left[\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_{i+} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau} \right]^2.$$

Si l'on prend p suffisamment grand, on pourra, d'après le lemme p. 4, choisir $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ de façon que

$$\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_{i+\epsilon} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau} \leq \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

(a^2 une constante finie ne dépendant nullement de p ni de w_m), puisque

$$w_m = \alpha_0 u_{m-1} + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m+1} + \dots + \alpha_p u_{m+p-1}.$$

Il viendra donc

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \leq \frac{C^{te} \text{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}} \quad (42)$$

pour un m fini quelconque (mais donné à l'avance), en choisissant p assez grand et en prenant pour $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des valeurs $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_p^{(m)}$ proprement choisies ¹⁾.

Comme on a

$$\begin{aligned} \int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau &= - \int_i w_{m-1} \Delta w_m d\tau = - \int_i w_m \Delta w_{m-1} d\tau \\ &= \int_i \varphi^2 w_m w_{m-2} d\tau, \quad (m=1, 2, 3, \dots)^2) \end{aligned}$$

on conclura

$$\left[\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau \right]^2 \geq \int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau \int_i \varphi^2 w_{m-2}^2 d\tau,$$

et ainsi successivement en tenant compte de l'inégalité (42)

¹⁾ Nous ajoutons les indices (m) , parce que les α varieront avec le nombre m , pendant que p sera tout à fait indépendant de m .

²⁾ On posera pour $m=1$

$$- \varphi^2 w_{m-2} = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}).$$

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_0^2 d\tau}{\int_i \frac{1}{\varphi^2} \left\{ \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \right\}^2 d\tau} \geq \frac{\int_i \varphi^2 w_1^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_0^2 d\tau} \geq \dots \geq \frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \geq \frac{C^{te} \text{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}}.$$

Ce résultat n'est démontré jusqu'à présent que pour un m fini quelconque, mais donné à l'avance, il importe de le démontrer pour un m croissant indéfiniment. Nous regarderons pour cela $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_p^{(m)}$ comme les coordonnées d'un point sur la sphère

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1 \quad (44)$$

dans un espace de $p+1$ dimensions, alors la condition (43) sera remplie pour un certain domaine δ_m de cette sphère.

Nous pourrons de la même manière, en choisissant proprement

$$\alpha_0^{(m+1)}, \alpha_1^{(m+1)}, \dots, \alpha_p^{(m+1)},$$

obtenir les inégalités

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_0^2 d\tau}{\int_i \frac{1}{\varphi^2} \left\{ \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \right\}^2 d\tau} \geq \frac{\int_i \varphi^2 w_1^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_0^2 d\tau} \geq \dots \geq \frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \geq \frac{\int_i \varphi^2 w_{m+1}^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau} \geq \frac{C^{te} \text{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}} \quad (44)$$

(la C^{te} finie étant toujours tout à fait indépendante de m et de p).

Les points

$$\alpha_0^{(m+1)}, \alpha_1^{(m+1)}, \dots, \alpha_p^{(m+1)}$$

qui satisfont à la condition (44) se trouveront dans un domaine δ_{m+1} intérieur à δ_m , puisque les conditions (43) sont toujours remplies à la

suite des conditions (44). En continuant de cette manière, on trouvera que le domaine δ_{m+2} correspondant doit être intérieur à δ_{m+1} , et ainsi de suite; il faut donc qu'il y ait des valeurs

$$\alpha_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_j^{(m)}, \quad (j=0, 1, 2, \dots, p) \quad (45)$$

pour lesquelles les inégalités (44) seront toujours vraies, même si m croît indéfiniment.

Alors nous aurons en posant

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[p]{p^2}} \quad (46)$$

et en désignant par B une constante finie, indépendante de j ,

$$\int \varphi^2 w_j^2 d\tau \leq B \cdot L_p^{2j}. \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (47)$$

En tenant compte que

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r},$$

on trouvera

$$w_j^2 \leq \frac{\text{Max. } \varphi^2}{16\pi^2} \int \varphi^2 w_{j-1}^2 d\tau \int \frac{d\tau}{r^2},$$

donc:

$$\text{abs. } w_j \leq A \cdot L_p^j, \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (48)$$

A étant une constante finie, indépendante de j .

Si nous prenons maintenant pour k^2 un nombre fini quelconque, mais donné d'avance, nous pourrions toujours en choisissant p assez grand obtenir que

$$k^2 L_p \leq L,$$

si L est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < L < 1,$$

et on aura alors

$$\text{abs. } (k^{2j} w_j) \leq A \cdot L^j, \quad (49)$$

ce que nous voulions démontrer.

La série

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \dots \quad (50)$$

représentera donc une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \quad (51)$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω .

§ 4. Nous supposons d'abord que k^2 ne soit pas une des racines de l'équation

$$(-k^2)^p \alpha_0 + (-k^2)^{p-1} \alpha_1 + \dots - k^2 \alpha_{p-1} + \alpha_p = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ 1 & -k^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -k^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - k^2 \end{vmatrix} \quad (52)$$

soit $\neq 0$; on pourra alors définir les $p+1$ fonctions

$$U \quad U' \quad U'' \dots, U^{(p-1)}$$

par les $p+1$ équations linéaires

$$\begin{aligned} \alpha_0 U + \alpha_1 U' + \alpha_2 U'' + \dots + \alpha_p U^{(p)} &= w, \\ U - k^2 U' &= u_0, \\ U' - k^2 U'' &= u_1, \\ . & \\ U^{(p-1)} - k^2 U^{(p)} &= u_{p-1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Chacune des fonctions $U, U', \dots, U^{(p)}$ représentera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω ; nous verrons facilement que la première, la fonction U , satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f. \quad (54)$$

¹⁾ Les indices (j) ne doivent pas être pris ici dans le sens que $U^{(j)}$ représente la j -^{me} dérivée de U par rapport à une variable quelconque.

où

$$P = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}; \quad (58)$$

nous avons ainsi obtenu une solution U de notre problème, si l'on choisit p suffisamment grand,

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

et ne satisfaisant pas à l'équation

$$D = 0.$$

Le cas exceptionnel demande une discussion spéciale.

§ 5. Si k^2 se rapproche d'une des racines

$$k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2$$

de l'équation

$$D = 0,$$

la fonction U croîtra d'après (57) indéfiniment, exception faite pour le cas que P s'annule en même temps.

Il s'agit d'examiner la fonction P au voisinage des pôles

$$k^2 = k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2.$$

On a d'après (58)

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta w & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \Delta u_0 & -k^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -k^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k^2 \end{vmatrix},$$

et à l'intérieur de ω

$$\Delta P + k^2 \varphi^2 P = \begin{vmatrix} \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ f + k^2 \varphi^2 u_0 & -k^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\varphi^2 u_0 + k^2 \varphi^2 u_1 & 1 & -k^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi^2 u_{p-2} + k^2 \varphi^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta P + k^2 \varphi^2 P = f \cdot D. \quad (59)$$

Si nous désignons par P_j les valeurs de P pour

$$k^2 = k_j^2, \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

nous aurons

$$\Delta P_j = -k_j^2 \varphi^2 P_j \quad \text{à l'intérieur de } \omega, \quad (60a)$$

$$\Delta P_j = 0 \quad \text{à l'extérieur de } \omega; \quad (60b)$$

nous savons du reste que les fonctions P_j sont continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, et qu'elles ont toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω .

Nous introduisons maintenant la notion des fonctions universelles par cette définition:

Nous appellerons fonction universelle correspondant à la surface ω d'une seule ou de plusieurs particules chaque fonction Φ_j continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'intérieur de ω aux équations

$$\Delta \Phi_j = -k_j^2 \varphi^2 \Phi_j, \quad \int \varphi^2 \Phi_j^2 d\tau = 1 \quad (61)$$

et ayant à l'extérieur de ω toutes les propriétés d'un potentiel; nous appellerons k_j^2 le nombre correspondant à la fonction universelle Φ_j . Dans les applications à la physique nous poserons toujours $\varphi^2 = 1$.

Après cette définition, nous pourrions énoncer notre résultat antérieur ainsi:

Les fonctions

$$P_j = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k_j^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k_j^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -k_j^2 \end{vmatrix}, \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (62)$$

sont ou identiquement nulles, ou elles représentent des fonctions universelles avec les nombres correspondants k_j^2 .

Il est facile à voir que les racines k_j de l'équation $D=0$ correspondant à des fonctions P_j , qui sont identiquement nulles, ne peuvent être des pôles pour la solution

$$U = \frac{P}{D}$$

de notre problème fondamental. Car on a dans ce cas, si k_j^2 est une valeur dans laquelle coïncident m racines ($m = 1, 2, \dots, p$)

$$D = \frac{dD}{d(k^2)} = \frac{d^2 D}{d(k^2)^2} = \dots = \frac{d^{m-1} D}{d(k^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{d(k^2)^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\frac{d^m P}{d(k^2)^m}}{\frac{d^m D}{d(k^2)^m}},$$

et $\frac{d^m P}{d(k^2)^m}$ reste continue avec ses premières dérivées, si l'on donne à k^2 une des valeurs k_j^2 ($j = 1, 2, \dots, p$).

On démontre aussi facilement que les racines k_j^2 correspondant à des fonctions universelles ne peuvent être des racines multiples. On aurait pour une racine double ¹⁾ d'après (59) à l'intérieur de ω

$$k_j^2 \varphi^2 P_j = -\Delta P_j$$

$$\Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} = -k_j^2 \varphi^2 \frac{dP_j}{d(k^2)} - \varphi^2 P_j.$$

Multiplions ces deux équations, divisons par φ^2 et intégrons sur i ; alors en tenant compte de l'identité

$$\int_i P_j \Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} d\tau = \int_i \frac{dP_j}{d(k^2)} \Delta P_j d\tau$$

on trouvera

$$\int_i P_j \Delta P_j d\tau = 0,$$

ou

$$\int_{i+} \left[\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_j = C^{12} = 0;$$

donc P_j ne pourrait être une fonction universelle, c. q. f. d.

¹⁾ Comme on aurait

$$\frac{dD}{d(k^2)} = 0.$$

Nous avons obtenu ainsi un résultat qui est d'une grande importance pour les questions concernant les fonctions universelles:

I. En choisissant le nombre p assez grand et en supposant

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

on pourra toujours trouver une fonction

$$V(k^2, x, y, z)$$

de manière que l'expression

$$U = \frac{V(k^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) \dots (k^2 - k_n^2)}, \quad (0 \leq n \leq p)^{1)}$$

satisfasse à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f,$$

si

$$k^2 \neq k_j^2, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

V représentant pour toute valeur $k^2 (< \sqrt[3]{p^2})$ une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω . $k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ seront des nombres bien définis et $< \sqrt[3]{p^2}$, tous différents entre eux.

Pour $k^2 = k_j^2 (j=1, 2, \dots, n)$ la fonction V devient une fonction universelle Φ_j , correspondant à la surface ω , à un facteur constant près.

Nous avons démontré ce résultat en supposant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int f \frac{d\tau}{r},$$

$$u_j = +\frac{1}{4\pi} \int \varphi^2 u_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \quad (j=1, 2, \dots)$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p = 0,$$

¹⁾ Pour le cas $n=0$, on doit poser le second membre

$$= V(k^2, x, y, z).$$

p étant un nombre fini, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ des constantes réelles, satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_p^2 = 1;$$

mais d'après le § 2 ¹⁾ notre résultat reste vrai, même dans ces cas particuliers; donc dans tous les cas.

Nous pouvons ajouter, comme à la fin du § 2:

La solution (63) a, comme fonction de k^2 , n pôles simples

$$k^2 = k_j^2, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (0 \leq n \leq p)$$

dans l'intervalle

$$0 < k^2 < \sqrt[p]{p^2}.$$

Toute autre solution U' de notre problème pour une valeur donnée \bar{k}^2 de k^2 ne diffère de (63) que d'une fonction universelle ayant \bar{k}^2 pour nombre correspondant ²⁾.

CHAPITRE III.

L'EXISTENCE DES FONCTIONS UNIVERSELLES.

§ 1. Nous pourrions démontrer l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots, k_j^2, \dots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_j, \dots$$

en démontrant que chaque potentiel

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int f \frac{d\tau}{r},$$

¹⁾ En posant $k_j^2 = \frac{1}{x_j}$, $(j=1, 2, \dots, n)$.

²⁾ S'il en existe une; autrement le problème n'admettra que la solution (63).

peut être représenté par une série

$$u_0 = \sum_0^{\infty} C_j \Phi_j,$$

les C_j étant des constantes bien définies et les Φ_j étant les fonctions universelles que l'on obtient par la solution de notre problème fondamental, si nous supposons toujours que f est continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω .

La démonstration serait absolument identique avec la démonstration analogue pour les développements en séries de fonctions harmoniques ¹⁾.

Nous allons, pour abréger, nous contenter de démontrer cette existence des k_j^2 , Φ_j en établissant les théorèmes suivants:

II. En partant d'une fonction f ²⁾ quelconque, continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω , et donnée d'avance, on peut toujours trouver un nombre p fini de manière que la solution de notre problème fondamental nous mène du moins à une fonction universelle.

III. Soit p^2 un nombre fini quelconque, il n'y aura qu'un nombre fini de fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres k_j^2 correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

IV. Si l'on connaît toutes les fonctions universelles avec des nombres correspondants satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

(p^2 étant un nombre fini donné d'avance) on pourra toujours trouver un nombre $p'^2 (> p^2)$ fini, de manière qu'il existe au moins une fonction universelle avec un nombre correspondant k'^2 , satisfaisant à la condition

$$\sqrt[3]{p^2} \leq k'^2 < \sqrt[3]{p'^2}.$$

Nous poserons dès à présent toujours $\varphi^2 = 1$.

¹⁾ Comp. W. Stekloff, Communications, T. VI, 2 et 3. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 4, Berlin (F. Dümmler's Verlag).

²⁾ Qui n'est pas identiquement nulle.

§ 2. Pour démontrer le théorème II, supposons que p soit un nombre positif assez grand, et que la solution (63) de notre problème fondamental ne nous ait pas mené à une fonction universelle Φ_j avec un nombre correspondant $k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$.

Alors le rayon de convergence de la série

$$\int_i u_0^2 d\tau + k^2 \int_i u_1^2 d\tau + k^4 \int_i u_1^4 d\tau + \dots$$

sera $\geq \sqrt[3]{p^4}$; on aura donc

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}},$$

puisque

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} < \frac{\int_i u_1^2 d\tau}{\int_i u_0^2 d\tau} < \frac{\int_i u_2^2 d\tau}{\int_i u_1^2 d\tau} < \dots$$

et l'inégalité

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} > \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}}$$

entraînerait pour cette raison l'inégalité

$$\int_i u_j^2 d\tau < (\sqrt[3]{p^2})^{2j} \int_i f^2 d\tau.$$

Or la relation

$$\int_i u_0^2 d\tau \leq \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \int_i f^2 d\tau$$

ne pourrait subsister pour un p^2 aussi grand que l'on veut, à moins que

$$\int_0^1 u_0^2 d\tau = 0,$$

ce qui entraînerait $f \equiv 0$, $c \cdot q \cdot f \cdot d$.

§ 3. Pour démontrer le théorème III, on remarquera d'abord, qu'en posant dans notre problème fondamental

$$f = -\varphi^2(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \dots + \alpha_p \Phi_p), \quad (64)$$

$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ étant p fonctions universelles avec les nombres correspondants $k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des constantes données, la solution (63) deviendra

$$U = u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \dots = \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2} \quad (65)$$

aussi longtemps que k^2 reste plus petit que le plus petit des nombres $k_1^2, k_2^2, \dots, k_p^2$.

Soit p^2 maintenant un nombre quelconque assez grand, mais fini, et supposons que $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ soient linéairement indépendantes, alors on saura trouver les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de façon que la série (65) converge absolument et uniformément pour n'importe quel

$$k^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2};$$

mais comme l'expression (65) croît indéfiniment, quand k^2 se rapproche du plus petit k_j^2 , il faudrait donc qu'au moins un des k_j^2 soit $> \sqrt[3]{(p-1)^2}$; donc il ne peut exister plus de $p-1$ fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres correspondants

$$< \sqrt[3]{(p-1)^2}.$$

p représentant toujours un nombre quelconque assez grand, mais fini. On n'aura qu'à changer $p-1$ en p , pour arriver à notre théorème III.

§ 4. Supposons pour la démonstration du théorème IV que nous connaissions toutes ¹⁾ les fonctions universelles avec des nombres correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

²⁾ Leur nombre est $\leq p$ d'après le théorème III, si p^2 est choisi assez grand.

(p^2 étant un nombre fini, donné d'avance), et soit f une fonction quelconque continue avec ses premières dérivées; alors il peut arriver des deux choses l'une: On peut trouver f comme une expression linéaire par rapport aux fonctions universelles données, ou la solution de notre problème fondamental doit nous mener au moins à une nouvelle fonction universelle avec un nombre correspondant fini et

$$\geq \sqrt[3]{p^2}.$$

Comme on peut toujours facilement donner $p + 1$ fonctions f linéairement indépendantes, le dernier des deux cas doit arriver au moins pour une de ces fonctions f .

§ 5. Nous finirons ce Chapitre par un théorème important sur les fonctions universelles, absolument analogue à un théorème connu sur les fonctions harmoniques.

V. Soient Φ_i et Φ_k deux fonctions universelles avec des nombres correspondants k_i^2 et k_k^2 , on aura

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

$$\int_i \Phi_i \Phi_k d\tau = 0, \quad ^1)$$
(66)

si

$$k_i^2 \neq k_k^2.$$

On n'a, pour la démonstration, qu'à multiplier l'équation

$$\Delta \Phi_i = -k_i^2 \Phi_i, \text{ à l'intérieur de } \omega$$

par Φ_k et à intégrer sur i ; alors on aura

$$\int_i k_i^2 \Phi_i \Phi_k d\tau = - \int_i \Phi_k \Delta \Phi_i d\tau = - \int_i \Phi_i \Delta \Phi_k d\tau,$$

d'où

$$k_i^2 \int_i \Phi_i \Phi_k d\tau = k_k^2 \int_i \Phi_i \Phi_k d\tau,$$

c'est-à-dire on trouvera les relations (66), si $k_i^2 \neq k_k^2$.

¹⁾ Dans le cas général

$$\int_i \varphi^2 \Phi_i \Phi_k d\tau = 0.$$

DEUXIÈME PARTIE.

SOLUTION DU PROBLÈME DES VIBRATIONS UNIVERSELLES POUR DES PARTICULES SPHÉRIQUES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

CHAPITRE I.

LE CAS D'UNE SEULE PARTICULE.

§ 1. Nous cherchons les fonctions universelles

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_j, \dots$$

avec les nombres correspondants

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots, k_j^2, \dots$$

pour le cas que la surface ω est représentée par une sphère de rayon R .

En prenant le centre de la sphère pour origine et en introduisant les coordonnées sphériques par les transformations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned} \tag{67}$$

nous pourrions écrire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions universelles:

$$\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} + k^2 \Phi = 0 \tag{68}$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} = 0, \tag{69}$$

à l'extérieur de la sphère.

Les fonctions Φ doivent être continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini.

Assurés de l'existence des fonctions Φ_j et des nombres k_j^2 , nous pouvons les représenter sous forme de séries procédant par fonctions sphériques

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(r) Y_i(\vartheta, \varphi),$$

où la fonction sphérique $Y_i(\vartheta, \varphi)$, satisfait à l'équation:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y_i}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \varphi^2} - i(i+1) Y_i = 0. \quad (71)$$

($i=0, 1, 2, \dots$)

Si nous introduisons la valeur (70) de Φ dans les équations (68) et (69), nous trouverons, en tenant compte de (71), que les fonctions $f_i(r)$ doivent être des solutions des équations ($i=0, 1, 2, \dots$)

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f_i}{\partial r} \right) - i(i+1) f_i \right] - k^2 f_i = 0 \quad (72)$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f_i}{\partial r} \right) - i(i+1) f_i \right] = 0, \quad (73)$$

à l'extérieur de la sphère.

Les solutions générales de l'équation (73) sont

$$f_i = c_{i1} \frac{1}{r^{i+1}} + c_{i2} r^i \quad (74)$$

c_{i1}, c_{i2} étant des constantes quelconques; les solutions générales de l'équation (72)

$$f_i = C_{i1} \frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} + C_{i2} \frac{J_{-(i+\frac{1}{2})}(kr)}{\sqrt{kr}}, \quad (75)$$

si C_{i1}, C_{i2} représentent des constantes quelconques et $J_n(x)$ la fonction de Bessel

$$J_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda) \Gamma(n+\lambda+1)}. \quad (76)$$

1)

Pour les fonctions $J_{i+\frac{1}{2}}$ et $J_{-(i+\frac{1}{2})}$ qui nous intéressent ici on peut trouver des expressions analytiques plus faciles à manier

1) En posant

$$\Pi(\lambda) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \lambda, \quad \Pi(0) = 1.$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi(n-1)n^z}{z(z+1) \dots (z+n-1)}.$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_0^i \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda) \Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^\lambda \cos \left[(i+1-\lambda) \frac{\pi}{2} - x \right],$$

$$J_{-(i+\frac{1}{2})}(x) = (-1)^i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_0^\infty \frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(i) \Pi(i-\lambda)} \left(\frac{1}{2x}\right)^\lambda \sin \left[(i+1-\lambda) \frac{\pi}{2} - x \right].$$
(77)

Comme les fonctions f_i doivent être continues à l'intérieur de la sphère aussi bien qu'à l'extérieur de la sphère et s'annuler à l'infini, il faut que

$$c_{i2} = 0,$$

$$C_{i2} = 0,$$

de manière que Φ doit avoir la forme

$$\Phi = \sum_0^\infty \frac{c_i}{r^{i+1}} Y_i(\vartheta, \varphi)$$

(à l'extérieur),

(78)

$$\Phi = \sum_0^\infty C_i \frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} Y_i(\vartheta, \varphi)$$

(à l'intérieur);

les constantes c_i , C_i doivent en outre satisfaire aux équations suivantes résultant de la continuité de Φ et de ses premières dérivées au passage de la surface, c'est-à-dire aux conditions

$$\Phi_e = \Phi_i,$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_e = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_i,$$

d'où

$$c_i = \frac{\sqrt{kR}}{R^{i+1} J_{i+\frac{1}{2}}(kR)} C_i,$$

$$c_i \frac{2kR J'_{i+\frac{1}{2}}(kR) - J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{2\sqrt{kR}} = - \frac{i+1}{R^{i+1}} C_i \quad ^1)$$
(79)

¹⁾ Pour ce deuxième groupe d'équations il faut supposer que les premières dérivées de Φ soient aussi développables en séries procédant par fonctions sphériques; on démontre facilement la rigueur de ce développement en tenant compte de ce que toutes les dérivées des fonctions Φ sont finies, ce qui résulte de leur définition.

Comme la première de ces équations donne la valeur de $\frac{c_i}{C_i}$, la deuxième devient une équation pour k seul

$$(2i+1)J_{i+\frac{1}{2}}(kR) + 2kR J'_{i+\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad (80)$$

($i=0, 1, 2, \dots$)

les valeurs possibles de k_0, k_1, k_2, \dots , doivent donc être des racines d'une de ces équations (80), et les fonctions Φ_j correspondantes auront la forme

$$\Phi_j = \frac{Y_j(\vartheta, \varphi)}{r^{j+1}} \quad (\text{à l'extérieur}), \quad (81)$$

$$\Phi_j = \frac{\sqrt{k_j R}}{R^{j+1} J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} \cdot \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{k_j r}} \cdot Y_j(\vartheta, \varphi) \quad (\text{à l'intérieur}),$$

les Y_j représentant des fonctions sphériques quelconques d'ordre j , k , étant une des racines de l'équation

$$(2j+1)J_{j+\frac{1}{2}}(kR) + 2kR J'_{j+\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad (82)$$

que l'on peut, ce qui est sans grande importance ici pour nous, présenter dans une forme plus simple, en introduisant la fonction $J_{j-\frac{1}{2}}(1)$.

I. Les fonctions universelles correspondant à une particule de rayon R sont (à un facteur constant près)

$$\Phi_j = \frac{Y_j(\vartheta, \varphi)}{r^{j+1}} \quad (\text{à l'extérieur de la sphère}),$$

$$\Phi_j = \frac{\sqrt{k_j R}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j R)} \cdot \frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_j r)}{\sqrt{k_j r}} \cdot \frac{Y_j(\vartheta, \varphi)}{R^{j+1}} \quad (\text{à l'intérieur de la sphère}),$$

¹⁾ Dans la forme

$$J_{j-\frac{1}{2}}(kR) = 0, \quad (82)$$

en posant

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos x.$$

Y_j , représentant une fonction sphérique d'ordre j , $k_j R$ une racine de l'équation transcendante ¹⁾

$$(2j+1)J_{j+\frac{1}{2}}(x) + 2xJ'_{j+\frac{1}{2}}(x) = 0, \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

Les exemples les plus simples, que j'ai considérés pour mes théories de la gravitation et du frottement dans les masses continues, sont les fonctions correspondant aux deux nombres k_j^2 les plus petits possibles

$$k_0 = \frac{\pi}{2R},$$

$$\Phi_0 = \frac{c}{r} \quad (\text{à l'extérieur}), \quad (83)$$

$$\Phi_0 = -\frac{c \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right)}{r} \quad (\text{à l'intérieur});$$

$$k_1 = \frac{\pi}{R},$$

$$\Phi_1 = c \frac{\cos \vartheta}{r^2} \quad (\text{à l'extérieur}), \quad (84)$$

$$\Phi_1 = \frac{c}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{R} \cos \frac{\pi r}{R}}{r^2} \cos \vartheta \quad (\text{à l'intérieur});$$

la vibration correspondant à (83) est une pulsation de la sphère, celle qui correspond à (84) une oscillation de la sphère dans la direction de l'axe des x .

§ 2. Les calculs qui nous ont mené aux fonctions universelles nous permettent de donner la solution d'un problème un peu plus général.

Nous savons toujours trouver une fonction ψ , continue dans tout l'espace avec ses premières dérivées, qui satisfait à l'intérieur d'une surface ω à l'équation

$$\Delta \psi + k^2 \psi = f \quad (85)$$

¹⁾ Ou, ce qui revient au même,

$J_{j-\frac{1}{2}}(x) = 0$, comp. p. 32.

(f une fonction donnée continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω) et qui a toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω , pourvu que le nombre donné k^2 n'appartienne pas à la suite

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots$$

Pour le cas de la sphère il est facile de donner la solution de ce problème en forme de série. On peut, comme on démontre facilement à l'aide de la théorie des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel ¹⁾, développer f et ψ en séries de la forme

$$\begin{aligned} f &= \sum_0^\infty \Phi_j, \\ \psi &= \sum_0^\infty \Psi_j, \end{aligned} \quad (86)$$

où les Φ_j et Ψ_j sont des fonctions universelles correspondant à la sphère.

Les fonctions Φ_j peuvent être dérivées de f en forme d'intégrales définies, et on arrive ainsi sans difficulté aux inégalités

$$|\Phi_j| \leq \alpha \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{f} \cdot H_j \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right|, \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (87)$$

α étant un nombre fini, H_j une certaine fonction sphérique d'ordre j dont la valeur absolue est $\leq 2j+1$ et \bar{f} représentant les valeurs de f sur la sphère concentrique à la sphère originale, pour laquelle l'intégrale a sa valeur maximum.

Entre les Ψ_j et les Φ_j on a la relation

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j}{k^2 - k_j^2}, \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (88)$$

à cause de (85).

Supposons que k^2 diffère de

$$k_0^2, k_1^2, \dots, k_{n-1}^2, k_{n+1}^2, k_{n+2}^2, \dots$$

par des nombres $\geq \alpha$, α étant un nombre fini et bien connu, pendant qu'on ne fait aucune autre restriction sur la grandeur

$$k^2 - k_n^2$$

que la supposition qu'elle ne soit pas nulle.

¹⁾ Des développements analogues sont possibles dans le cas général d'une surface ω quelconque; comp. p. 26.

D'après les raisonnements de ce paragraphe nous pourrions affirmer que dans tout l'espace les valeurs absolues de ψ et de ses premières dérivées seront

$$\leq a \cdot \text{abs. Max.}(f) + b \frac{|f_n|}{|k^2 - k_n^2|},$$

où a et b sont des constantes finies ne dépendant ni de la fonction f ni de k^2 , $\text{abs. Max.}(f)$ la plus grande valeur absolue de f à l'intérieur de la sphère et

$$f_n = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{f} \cdot H_n \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Ce résultat (que l'on peut aisément généraliser pour des surfaces plus générales) sera très utile pour la solution du problème que nous nous poserons maintenant.

CHAPITRE II.

DEUX OU PLUSIEURS PARTICULES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

§ 1. Quoique le problème de deux particules puisse trouver sa solution complète à l'aide des coordonnées dipolaires de M. C. Neumann, le physicien préférera toujours à cette méthode une méthode approximative comparable à celle de Murphy pour les problèmes électrostatiques. Il s'agit de démontrer qu'une telle méthode est possible, et qu'elle mène à la solution du problème avec toute l'exactitude que l'on veut.

Supposons toujours pour plus de simplicité que les rayons des deux particules soient égaux; alors la première idée qui se présente, et qui est juste, comme nous verrons, nous suggère que les durées de vibration pour le système composé de deux particules ne différeront des durées de vibration d'une seule particule que par des grandeurs d'ordre $\frac{\text{rayon}}{\text{distance}}$ comparées avec les valeurs originales. Il est vraisemblable qu'à chaque nombre k_n^2 de la suite

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots,$$

correspondant à une des sphères, on puisse assigner un nombre

$$k_n^2 + \varepsilon_n$$

(ou peut-être plusieurs) qui appartient à la suite

$$K_0^2, K_1^2, K_2^2, \dots$$

correspondant au système composé des deux sphères, et que chaque ε_n soit d'ordre $\frac{\text{rayon}}{\text{distance}}$ en comparaison avec k_n^2 .

On essayera donc, pour trouver les vibrations universelles des deux sphères correspondant au nombre $k_n^2 + \varepsilon_n$, à poser d'abord

$$\Phi_n^1 = \Phi_n^{1,1} + \Phi_n^{1,2}, \quad (89)$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \quad (\text{à l'extérieur de la sphère 1}), \quad (90)$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_1)}{\sqrt{k_n^1 r_1}} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+1}} \quad (\text{à l'intérieur de la sphère 1}),$$

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \quad (\text{à l'extérieur de la sphère 2}), \quad (91)$$

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_2)}{\sqrt{k_n^1 r_2}} \cdot \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{R^{n+1}} \quad (\text{à l'intérieur de la sphère 2}),$$

en prenant les deux centres des sphères respectivement comme pôles de deux systèmes de coordonnées polaires $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ et $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$.

Nous laisserons d'abord les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et la constante k_n^1 arbitraires; la fonction Φ_n^1 serait toujours continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, si k_n^1 était égal à k_n ; mais comme nous ne ferons plus cette supposition, on pourra seulement affirmer qu'elle sera continue dans tout l'espace pendant que ces premières dérivées seront discontinues aux deux surfaces ω_1 et ω_2 des sphères. Φ_n^1 satisfait du reste aux équations

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_n^1 &= 0, & \text{à l'extérieur des deux sphères,} \\ \Delta \Phi_n^1 + (k_n^1)^2 \Phi_n^1 &= (k_n^1)^2 \Phi_n^{1,2}, & \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta \Phi_n^1 + (k_n^1)^2 \Phi_n^1 &= (k_n^1)^2 \Phi_n^{1,1}, & \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \quad (92)$$

Il faut calculer les discontinuités des dérivées normales de Φ_n^1 aux surfaces ω_1 et ω_2 . En désignant toujours par r les normales intérieures on aura à la sphère 1

$$\left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_a - \left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_i = \left| \frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r} \right|_a - \left| \frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r} \right|_i = (n+1) \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+1}} \cdot k_n^1 \left| \frac{d}{dx} \left\{ \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \right\} \right|_{x=k_n^1 R},$$

ou

$$\left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_a - \left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1), \quad (93a)$$

et d'une manière analogue à la deuxième sphère

$$\left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_a - \left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2). \quad (93b)$$

Posons

$$V_{n,1(2)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_{1(2)}} \left[\left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_a - \left| \frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r} \right|_i \right] \frac{d\omega}{r},$$

$$V_n = V_{n,1} + V_{n,2}, \quad (94)$$

alors nous pourrions affirmer que la fonction

$$\Psi_n^1 = \Phi_n^1 + V_n,$$

est continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace; d'après (92) elle satisfera aux équations

$$\Delta \Psi_n^1 = 0, \text{ à l'intérieur des deux sphères,}$$

$$\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^1 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 1,} \quad (96)$$

$$\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^2 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 2.}$$

Nous pourrions toujours développer

$$\Phi_n^{1,2} + V_{n,1} = \varphi_1^1 + \varphi_2^1 + \varphi_3^1 + \dots \quad (97a)$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 1, et

$$\Phi_n^{1,1} + V_{n,2} = \chi_1^1 + \chi_2^1 + \chi_3^1 + \dots$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 2, et nous voulons maintenant calculer les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et k_n^1 jusqu'à présent arbitraires de manière que

$$\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0, \\ \chi_n^1 &= 0. \end{aligned} \tag{98}$$

Ces équations seront vraies dans tout l'espace, si

$$\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^1 &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{99}$$

et la théorie des fonctions sphériques nous mène facilement aux relations auxquelles les $4n+3$ grandeurs

$$Y_n^{1,1}, Y_n^{1,2}, k_n^1$$

doivent satisfaire:

$$\begin{aligned} \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1) &= \left| \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \right|_n^{\omega_1}, \\ \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2) &= \left| \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \right|_n^{\omega_2}, \end{aligned} \tag{100}$$

en désignant par $\left| \dots \right|_n^{\omega_1}$ et $\left| \dots \right|_n^{\omega_2}$ les fonctions sphériques d'ordre n dans les développements à la surface ω_1 et ω_2 .

Ce sont

$$4n+2$$

équations linéaires et homogènes en $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$; on peut donc calculer à l'aide des $4n+2$ équations (100) les $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$ à un facteur constant près, qui reste arbitraire, et k_n^1 .

En formant Ψ_n^1 avec ces valeurs de $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, k_n^1 nous appellerons Ψ_n^1 la première approximation de la fonction universelle cherchée.

Il importe de montrer que k_n^1 défini par les équations (100) ne diffère de k_n que par une quantité qui peut être aussi petite que l'on veut, si l'on prend $\frac{R}{\varrho}$ suffisamment petit (ϱ la distance des deux sphères).

En effet, nous pouvons écrire les équations (100) dans la forme suivante

$$x \cdot y_k^1 = \sum_j^{2n+1} c_{kj} y_j^2,$$

$$x \cdot y_k^2 = \sum_j^{2n+1} c_{kj} y_j^1,$$

où nous posons

$$x = \frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)},$$

où les y_j^1, y_j^2 sont tout à fait indépendants de R et ϱ et supposés de ne pas s'annuler tous en même temps, et où les c_{kj} sont

$$= \alpha_{kj} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1},$$

α_{kj} représentant des nombres ne dépendant nullement de R et ϱ .

Il faut donc que

$$\frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} = \alpha \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1}, \quad (101)$$

α représentant un nombre ne dépendant nullement de R et ϱ , fini et différent de zéro, puisque le déterminant des α_{kj} est toujours $\neq 0$.

Comme on a

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_n R) = 0,$$

et l'équation

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = 0$$

n'a au point $x = k_n R$ qu'une racine *simple*, comme à ce point $k_n R$ et $J_{n+\frac{1}{2}}(k_n R)$ ont des valeurs finies différentes de zéro, on conclura

$$\beta \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1} < |k_n^1 R - k_n R| < \gamma \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1}, \quad (102)$$

β et γ représentant deux nombres finis et différents de zéro, ne dépendant nullement de R et ϱ , si $\frac{R}{\varrho}$ est plus petit qu'un nombre positif, différent de zéro, ne dépendant que du nombre n .

§ 2. Nous allons trouver maintenant une deuxième, troisième approximation etc. et démontrer la convergence de ces approximations.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{2,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,1} + (k_n^{(1)})^2 \Phi_n^{2,1} = -(k_n^{(1)})^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 1, (103a)}$$

et la fonction $\Phi_n^{2,2}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,2} + (k_n^{(1)})^2 \Phi_n^{2,2} = -(k_n^{(1)})^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 2. (103b)}$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura en désignant par C le maximum des valeurs absolues de $\Phi_n^{1,1}$ et $\Phi_n^{1,2}$

$$\begin{aligned} |\Phi_n^{2,1}| &\leq a \cdot C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1}, \\ |\Phi_n^{2,2}| &\leq a \cdot C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (104)^1$$

où a est un nombre fini ne dépendant ni des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, ni de $\frac{R}{\rho}$.

1) A cause de (95), $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ ne contient pas de fonction universelle d'ordre n , et l'on aura à l'intérieur de ω_1

$$\begin{aligned} |\Phi_n^{1,2}| &\leq c^{10} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1} \\ |V_{n,1}| &\leq c^{10} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Ce qui concerne $V_{n,2}$, on a à l'intérieur de ω_1

$$|V_{n,2}| \leq c^{10} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{3n+2};$$

la fonction universelle d'ordre n , que $V_{n,2}$ contient, a une valeur absolue

$$|V_{n,2}|_n \leq c^{10} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{4n+2},$$

donc

$$\frac{|V_{n,2}|_n}{|(k_n^{(1)})^2 - k_n^{(2)}|} \leq c^{10} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}, \text{ (d'après 102).}$$

Le raisonnement du § 2 Chap. I nous donne ainsi la première inégalité (104), la seconde s'obtient d'une manière analogue.

La fonction

$$\chi_n^2 = \varphi_n^1 + \Phi_n^{2,1} + \Phi_n^{2,2} \quad (105)$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta \chi_n^2 + (k_n^1)^2 \chi_n^2 &= (k_n^1)^2 \Phi_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta \chi_n^2 + (k_n^1)^2 \chi_n^2 &= (k_n^1)^2 \Phi_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \quad (106)$$

Comme nous avons calculé k_n^1 et les rapports des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ à l'aide des équations (98), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \varphi_n^2 &= \Phi_n^1 - |\Phi_n^{2,2}|_{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^2 &= \chi_n^1 - |\Phi_n^{2,1}|_{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \quad (107)$$

en prenant les $|\cdot|_{\omega_1}$ et $|\cdot|_{\omega_2}$ dans le même sens que p. 38; nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^2 , $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$.

On aura

$$\begin{aligned} |k_n^2 - k_n^1| &\leq b |k_n^1 - k_n^0| \frac{R}{\rho}, \\ |Y_n^{2,1} - Y_n^{1,1}| &\leq b.C. \frac{R}{\rho}, \\ |Y_n^{2,2} - Y_n^{1,2}| &\leq b.C. \frac{R}{\rho}, \end{aligned} \quad (108)$$

si b désigne une constante finie ne dépendant nullement de $\frac{R}{\rho}$.

Pour démontrer ces inégalités (108), nous n'avons qu'à faire voir que

$$\begin{aligned} |\Phi_n^{2,2}|_{\omega_1} &\leq B.C. \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ |\Phi_n^{2,1}|_{\omega_2} &\leq B.C. \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \quad (109)$$

B étant une constante finie (ne dépendant nullement de $\frac{R}{\rho}$), puisque les termes φ_n^1 et χ_n^1 sont de l'ordre $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1}$, et ces inégalités (109) découlent immédiatement des inégalités (104).

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^1 , $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, χ_n^2 , en introduisant partout les valeurs

$$k_n^2, Y_n^{2,1}, Y_n^{2,2} \text{ au lieu des } k_n^1, Y_n^{1,1}, Y_n^{1,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{2,1}, \psi_n^{2,2}, \psi_n^2,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$; χ_n^2 ; alors la fonction ψ_n^2 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 , et elle satisfera aux équations

$$\Delta \psi_n^2 + (k_n^2)^2 \psi_n^2 = (k_n^2)^2 \bar{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \quad (110)$$

$$\Delta \psi_n^2 + (k_n^2)^2 \psi_n^2 = (k_n^2)^2 \bar{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2,$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n^{2,2} &= \psi_n^{2,2} - \psi_n^{2,2|1}, \quad 1) \\ \bar{\psi}_n^{2,1} &= \psi_n^{2,1} - \psi_n^{2,1|2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Nous appellerons ψ_n^2 , k_n^2 la deuxième approximation, et nous remarquerons que d'après (104)

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}_n^{2,2}| &\leq a \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ |\bar{\psi}_n^{2,1}| &\leq a \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \quad (112) \quad 2)$$

1) $|\psi_n^{2,2}|_n$ la fonction universelle d'ordre n de la sphère 1 que $\psi_n^{2,2}$ contient; $\psi_n^{2,1|2}$ a la signification analogue.

2) On pourrait penser au premier aspect que les fonctions $\psi_n^{2,1}$, $\psi_n^{2,2}$ ne satisfassent pas aux mêmes inégalités que $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, puisque les nouvelles fonctions $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ et $\Phi_n^{1,1} + V_{n,2}$ contiennent maintenant des fonctions universelles d'ordre n : φ_n^1 et χ_n^1 , mais les valeurs absolues de ces fonctions seront d'après (107) et (104)

$$\leq c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2},$$

et, divisées par $|(k_n^2)^2 - k_n^2|$,

$$\leq c^{te} \text{ finie. } C \frac{R}{\rho} \quad \begin{cases} \text{pour } \psi_n^{2,1} \text{ à } \omega_1, \\ \text{pour } \psi_n^{2,2} \text{ à } \omega_2; \end{cases}$$

donc en tout cas $|\psi_n^{2,1}| \leq c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}$ à l'intérieur de ω_2 ,

$$|\psi_n^{2,2}| \leq c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \text{ à l'intérieur de } \omega_1.$$

et d'après (108) et (104)

$$|\psi_n^2 - \psi_n^1| \leq b \cdot C \frac{R}{\rho}, \quad (113)$$

$$|k_n^2 - k_n^1| \leq b |k_n^1 - k_n| \frac{R}{\rho}.$$

§ 3. Nous procédons à une troisième approximation.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{3,1} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1} = -(k_n^2)^2 \bar{\psi}_n^{2,2}, \text{ à l'intérieur de } \omega_1, \quad (114a)$$

et la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{3,2} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2} = -(k_n^2)^2 \bar{\psi}_n^{2,1}, \text{ à l'intérieur de } \omega_2. \quad (114b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura d'après (112)

$$\begin{aligned} |\Phi_n^{3,1}| &\leq a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}, \\ |\Phi_n^{3,2}| &\leq a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2}. \end{aligned} \quad (115)$$

La fonction

$$\chi_n^3 = \psi_n^2 + \Phi_n^{3,1} + \Phi_n^{3,2}, \quad (116)$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 &= (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2}, \text{ à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 &= (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1}, \text{ à l'intérieur de } \omega_2. \end{aligned} \quad (117)$$

Comme nous avons calculé k_n^2 et les rapports des $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$ à l'aide des équations (107), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \varphi_n^3 &= \varphi_n^2 - |\Phi_n^{3,2}|_{\omega_1} = 0, \text{ à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^3 &= \chi_n^2 - |\Phi_n^{3,1}|_{\omega_2} = 0, \text{ à la surface } \omega_2; \end{aligned} \quad (110)$$

nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^3 , $Y_n^{3,1}$, $Y_n^{3,2}$.

On aura [la démonstration est analogue à celle des inégalités (108) du § 2]

$$\begin{aligned} |k_n^3 - k_n^2| &\leq b^2 |k_n^1 - k_n| \left(\frac{R}{\rho}\right)^2, \\ |Y_n^{3,1} - Y_n^{2,1}| &\leq b^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^2, \\ |Y_n^{3,2} - Y_n^{2,2}| &\leq b^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^2. \end{aligned} \quad (119)$$

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^2 , $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^3 en introduisant partout les valeurs

$$k_n^3, Y_n^{3,1}, Y_n^{3,2} \text{ au lieu des } k_n^2, Y_n^{2,1}, Y_n^{2,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{3,1}, \psi_n^{3,2}, \psi_n^3,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^3 ; alors la fonction ψ_n^3 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 , et elle satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 &= (k_n^3)^2 \psi_n^{3,2}, \text{ à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 &= (k_n^3)^2 \bar{\psi}_n^{3,2}, \text{ à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \quad (120)$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n^{3,2} &= \psi_n^{3,2} - |\psi_n^{3,2}|_n^1, \\ \bar{\psi}_n^{3,1} &= \psi_n^{3,1} - |\psi_n^{3,1}|_n^2. \end{aligned} \quad (121)$$

Nous appellerons ψ_n^3 , k_n^3 la troisième approximation, et nous remarquerons que d'après (115)

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n^{3,2} &\leq a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+3}, \text{ à l'intérieur de } \omega_1, \\ \bar{\psi}_n^{3,1} &\leq a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+3}, \text{ à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \quad (122)^2$$

¹⁾ Comp. la remarque ¹⁾ p. 42.

²⁾ On fera le raisonnement analogue à la remarque ²⁾ p. 42.

et d'après (119) et (115)

$$\begin{aligned} |\psi_n^3 - \psi_n^2| &\leq b^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2, \\ |k_n^3 - k_n^2| &\leq b^2 |k_n^1 - k_n| \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2. \end{aligned} \quad (123)$$

§ 4. II. En continuant ainsi on obtiendra la solution du problème dans la forme

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \psi_n^1 + (\psi_n^2 - \psi_n^1) + (\psi_n^3 - \psi_n^2) + \dots \\ K_n &= k_n + (k_n^1 - k_n) + (k_n^2 - k_n^1) + (k_n^3 - k_n^2) + \dots \end{aligned} \quad (124)$$

Ces séries seront absolument et uniformément convergentes, si $\frac{R}{\varrho}$ est suffisamment grand, puisque leurs termes sont respectivement plus petits que ceux des progressions géométriques

$$\begin{aligned} &O\left\{1 + b \frac{R}{\varrho} + b^2 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \dots\right\}, \\ &k_n + (k_n^1 - k_n) \left\{1 + b \frac{R}{\varrho} + b^2 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \dots\right\}. \end{aligned}$$

A chaque racine k_n^1 de l'équation algébrique résultant des équations (100) correspondra une valeur K_n .

La méthode analogue à celle de Murphy est donc démontrée; je l'ai déjà employée dans mon livre ¹⁾ „Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massen-systemen“ pour les cas

$n = 0$ (Théorie de la gravitation),

$n = 1$ (Théorie du frottement);

nous savons maintenant qu'elle est applicable pour un n quelconque pourvu que $\frac{R}{\varrho}$ soit assez petit, et la méthode peut être immédiatement généralisée pour un nombre fini de particules.

C'est le résultat que je voulais obtenir.

¹⁾ Comp. p. 3.

Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

В. П. Ермакова.

1. Постановка задачи.

Въ XLVIII томѣ „Mathematische Annalen“ (стр. 317—364) А. Н. Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Составить дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0 \quad (1)$$

такъ, чтобы полный интегралъ этого уравненія имѣлъ форму

$$(y - r_1)^{m_1} (y - r_2)^{m_2} \dots (y - r_n)^{m_n} = C, \quad (2)$$

гдѣ показатели m_1, m_2, \dots, m_n — числа постоянныя. При этомъ предполагается, что число n дано, а также дана степень функций M и N относительно y . Предполагается, что M и N суть цѣлыя функции относительно y .

Въ этой задачѣ показатели m_1, m_2, \dots, m_n можно считать данными; неизвѣстными функциями будутъ r_1, r_2, \dots, r_n и коэффициенты при различныхъ степеняхъ y въ M и N . Опредѣленіе неизвѣстныхъ функций приводится къ рѣшенію системы обыкновенныхъ и дифференціальныхъ уравненій. Коркинъ показалъ, что для этой системы дифференціальныхъ уравненій всегда могутъ быть найдены полные интегралы въ конечной формѣ. Сверхъ того Коркинъ показалъ, что рѣшеніе задачи можетъ принимать нѣсколько различныхъ формъ. Въ этомъ заключается глубокий интересъ мемуара Коркина.

Въ общемъ изложеніи Коркина для читателя не выступаетъ со всей рельефностью общая мысль, которою руководствовался авторъ при своихъ изслѣдованіяхъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ изслѣдованіе усложнено болѣе, чѣмъ слѣдуетъ.

А. Н. Коркинъ прежде всего предполагаетъ, что M и N первой степени относительно y , т. е. рѣшаетъ задачу для такого уравненія

$$(y + P) dy + (Qy + R) dx = 0. \quad (3)$$

Еще Эйлеръ въ своихъ изслѣдованіяхъ замѣтилъ, что простою замѣною переменныхъ можно достигнуть того, чтобы было $P = 0$, $Q = 1$. Эти положенія оказываются несущественными для теоріи. Между тѣмъ первое изъ этихъ положеній, $P = 0$, въ изслѣдованіи Коркина приводитъ къ такой зависимости между искомыми функціями v_1, v_2, \dots, v_n , которая какъ будто играетъ основную роль во всемъ изслѣдованіи.

Въ настоящей статьѣ я желаю выяснитъ, какими соображеніями руководствовался А. Н. Коркинъ при производствѣ своихъ изслѣдованій, выяснитъ общій путь разсужденій, при помощи которыхъ можно построить всѣ вычисленія, дѣйствительно приводящіе къ полному рѣшенію задачи.

Такимъ образомъ, смѣю надѣяться, что моя статья облегчитъ читателю пониманіе прекраснаго мемуара А. Н. Коркина.

Напомню прежде всего, что число множителей n въ интегралѣ (2) предполагается даннымъ, а также дана степень функцій M и N относительно y .

Введу нѣкоторыя сокращенныя обозначенія.

Выраженіе въ первой части уравненія (2) я буду сокращенно обозначать черезъ

$$\Pi(y - v)^m.$$

Логарифмъ отъ этого выраженія будетъ

$$m_1 \log(y - v_1) + m_2 \log(y - v_2) + \dots + m_n \log(y - v_n),$$

что сокращенно я буду обозначать черезъ

$$\sum m \log(y - v).$$

Подобнымъ образомъ имѣемъ сокращенныя обозначенія

$$\sum m = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

$$\sum \frac{m}{y - v} = \frac{m_1}{y - v_1} + \frac{m_2}{y - v_2} + \dots + \frac{m_n}{y - v_n}.$$

и т. д.

2. Рѣшеніе задачи въ простѣйшемъ случаѣ.

Мы ищемъ такое дифференціальное уравненіе, полный интеграль котораго будетъ

$$\Pi(y-v)^m = C. \quad (2)$$

Взявъ логариѣмы отъ обѣихъ частей, получимъ

$$\sum m \log(y-v) = \log C.$$

Дифференцируя это уравненіе, получаемъ исконое дифференціальное уравненіе

$$\sum \frac{m(\partial y - v' \partial x)}{y-v} = 0. \quad (4)$$

Остается освободить это уравненіе отъ знаменателей, для каковой цѣли вводимъ слѣдующія обозначенія

$$F(y) = (y-v_1)(y-v_2) \dots (y-v_n),$$

$$F_1(y) = F(y) \sum \frac{m}{y-v}, \quad (5)$$

$$F_2(y) = F(y) \sum \frac{mv'}{y-v}.$$

Уравненіе (4), послѣ освобожденія отъ знаменателей, приметъ слѣдующую форму

$$F_1(y) \partial y - F_2(y) \partial x = 0. \quad (6)$$

Полный интеграль этого уравненія выражается формулою (2).

Степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ равна $n-1$.

Поэтому мы рѣшили задачу въ томъ случаѣ, когда данная степень функцій M и N равна $n-1$. Въ этомъ случаѣ функціи v_1, v_2, \dots, v_n произвольны; исконое дифференціальное уравненіе опредѣляется формулою (6), при чемъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ опредѣляются по формуламъ (5). Но если степень функцій M и N ниже $n-1$, то рѣшеніе нашей задачи усложняется.

3. Пониженіе степени на единицу; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что степень функцій M и N равна $n - 2$. Въ такомъ случаѣ въ выраженіи (6) функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго дѣлителя первой степени: $y - p$; слѣдовательно

$$F_1(p) = 0, \quad F_2(p) = 0.$$

На основаніи формулъ (5) эти уравненія могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad (7)$$

$$\sum \frac{mv'}{p-v} = 0. \quad (8)$$

Уравненіе (8) дифференціальное; полный интегралъ этого уравненія легко можетъ быть найденъ. Для этой цѣли умножимъ уравненіе (7) на ∂p , а уравненіе (8) на ∂x и вычтемъ; получимъ

$$\sum \frac{m(\partial p - \partial v)}{p-v} = 0.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum a \log(p-v) = \log C,$$

или

$$H(p-v)^m = C. \quad (9)$$

Остается теперь изъ уравненій (7) и (9) опредѣлить p и v_n черезъ остальные функціи v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

4. Пониженіе степени на единицу; второе рѣшеніе.

Пониженіе степени на единицу въ функціяхъ M и N можетъ быть сдѣлано еще другимъ способомъ. Мы можемъ наши величины подобрать такъ, чтобы въ функціяхъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ [уравненія (6)] коэффиціенты при y^{n-1} обращались въ нули.

Коэффициентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$; положимъ

$$\sum m = 0. \quad (10)$$

Коэффициентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mr'$; положимъ

$$\sum mr' = 0.$$

Полный интеграль этого уравненія будетъ

$$\sum mr = C. \quad (11)$$

Если равенства (10) и (11) удовлетворяются, то рѣшеніе нашей задачи дается уравненіемъ (6), т. е. въ настоящемъ случаѣ

$$M = F_1(y), \quad N = -F_2(y).$$

5. Пониженіи степени на два; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что данная степень искомымъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общій квадратный множитель: $(y-p)(y-q)$. Въ § 3 было показано, что корни этого множителя должны удовлетворять уравненіямъ

$$\sum \frac{m}{p-r} = 0, \quad \Pi (p-r)^m = C,$$

$$\sum \frac{m}{q-r} = 0, \quad \Pi (q-r)^m = C'.$$

Остается изъ этихъ уравненій опредѣлить p , q , r_n и r_{n-1} черезъ остальные функціи r_1, r_2, \dots, r_{n-2} , которыя можно считать произвольными. Послѣ такого опредѣленія функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

6. Пониженіе степени на два; второе рѣшеніе.

Положимъ опять, что данная степень искомымъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ, какъ сказано раньше, функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго квадратнаго множителя. Мы предполагали, что корни этого квадратнаго множителя различны. Но можетъ случиться,

что корни квадратнаго множителя равны, т. е. самъ общій множитель превращается въ полный квадратъ: $(y - p)^2$. Въ такомъ случаѣ должны удовлетворяться слѣдующія уравненія

$$F_1(p) = 0, \quad F'_1(p) = 0, \quad (12)$$

$$F_2(p) = 0, \quad F'_2(p) = 0. \quad (13)$$

На основаніи формулъ (5) уравненія (12) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{m}{p - v} = 0, \quad (14)$$

$$\sum \frac{m}{(p - v)^2} = 0. \quad (15)$$

Уравненія (13) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{mv'}{p - v} = 0, \quad (16)$$

$$\sum \frac{mv'}{(p - v)^2} = 0. \quad (17)$$

Покажемъ теперь, что эти четыре уравненія зависимы, что уравненіе (17) будетъ слѣдствіемъ уравненій (14) и (15). Дифференцируя уравненіе (14), находимъ

$$\sum \frac{m(p' - v')}{(p - v)^2} = 0.$$

Если это послѣднее уравненіе вычтемъ изъ уравненія (15), умноженнаго на p' , то получимъ уравненіе (17). Итакъ, уравненіе (17) можно отбросить. Далѣе, дифференціальное уравненіе (16), какъ показано въ § 3, можетъ быть замѣнено его полнымъ интеграломъ

$$H(p - v)^m = C. \quad (18)$$

Остается функціи p, v_1, v_2, \dots, v_n подобрать такъ, чтобы удовлетворялись уравненія (14), (15) и (18). Изъ этихъ трехъ уравненій могутъ быть опредѣлены три функціи черезъ $n - 2$ остальныхъ функціи, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются такъ

$$M = \frac{F_1(y)}{(y - p)^2}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y - p)^2}.$$

7. Понижение степени на два; третье рѣшеніе.

Покажемъ еще третье рѣшеніе той же самой задачи, т. е. мы опять предполагаемъ, что степень искомымъ функций M и N равна $n-3$. Въ § 4 было показано, что степень функций $F_1(y)$ и $F_2(y)$ можно понизить на единицу, если коэффициенты при y^{n-1} въ этихъ функцияхъ приравняемъ нулю. Въ результатъ получимъ уравненія

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = C. \quad (19)$$

Нужно понизить степень функций M и N еще на единицу. Для этой цѣли нужно подобрать v_1, v_2, \dots, v_n такъ, чтобы функции $F_1(y)$ и $F_2(y)$ имѣли общій корень p . По доказанному въ § 3 получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad H(p-v)^m = C'. \quad (20)$$

Остается подобрать показатели m_1, m_2, \dots, m_n и функции p, v_1, v_2, \dots, v_n такъ, чтобы удовлетворялись четыре уравненія (19) и (20). Послѣ этого искомыя функции опредѣляются по формуламъ

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функций v_1, v_2, \dots, v_n остаются произвольными.

8. Понижение степени на два; четвертое рѣшеніе.

Мы можемъ понизить степень функций $F_1(y)$ и $F_2(y)$ на двѣ единицы, если коэффициенты при двухъ высшихъ степеняхъ въ каждой функции приравняемъ нулю.

Коэффициентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$.

Коэффициентъ при y^{n-2} въ той же функции будетъ $\sum mv - \sum m \sum v$. Приравнявъ эти коэффициенты нулю, получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = 0. \quad (21)$$

Коэффициентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$. Этотъ коэффициентъ обращается въ нуль на основаніи второго уравненія (21). Коэф-

фицієнтъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mrv' - \sum v \sum mv'$. Этотъ коэффицієнтъ обращается въ нуль, если

$$\sum mrv' = 0.$$

Полный интегралъ этого дифференціального уравненія будетъ

$$\sum mrv^2 = C. \quad (22)$$

Остается подобрать $m_1, m_2, \dots, m_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись три уравненія (21) и (22). Послѣ этого искомыя функціи M и N будутъ

$$M = F_1(y), \quad N = -F_2(y).$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n - 2$ изъ функцій v_1, v_2, \dots, v_n остаются произвольными.

9. Пониженіе степени на три.

Мы можемъ понижать степень искомыхъ функцій M и N далѣе. Изъ предыдущаго становится уже яснымъ дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Положимъ, что степень функцій M и N понижается на три единицы, т. е. равна $n - 4$. Въ такомъ случаѣ задача допускаетъ семь слѣдующихъ рѣшеній.

Первое рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-r} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-r} = 0, \quad \sum \frac{m}{r-r} = 0.$$

$$\Pi(p-r)^m = C, \quad \Pi(q-r)^m = C', \quad \Pi(r-r)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}.$$

Второе рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-r} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-r)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-r} = 0,$$

$$\Pi(p-r)^m = C, \quad \Pi(q-r)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2(y-q)}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2(y-q)}.$$

Третье решение.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^3} = 0,$$

$$\Pi (p-v)^m = C,$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^3}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^3}.$$

Четвертое решение.

$$\sum m = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0,$$

$$\sum mv = C, \quad \Pi (p-v)^m = C', \quad \Pi (q-v)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

Пятое решение.

$$\sum m = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0,$$

$$\sum mv = C, \quad \Pi (p-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}.$$

Шестое решение.

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0,$$

$$\sum mv^2 = C, \quad \Pi (p-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Седьмое решение.

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = 0, \quad \sum mv^2 = 0, \quad \sum mv^3 = C,$$

$$M = F_1(y), \quad N = -F_2(y).$$

Во всѣхъ рѣшеніяхъ $n - 3$ изъ функцій v_1, v_2, \dots, v_n остаются произвольными.

Мы можемъ это пониженіе продолжить до тѣхъ поръ, пока M и N будутъ содержать y въ первой степени, т. е. искомое уравненіе приведетъ къ формѣ (3). При этомъ придется сдѣлать пониженіе на $n - 2$. Согласно данной выше теоріи въ окончательномъ результатѣ останутся произвольными двѣ изъ функцій v_1, v_2, \dots, v_n .

10. Общая задача.

Дано дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0, \quad (23)$$

въ которомъ M и N суть цѣлыя алгебраическія функціи относительно y ; требуется узнать, можетъ ли быть полный интегралъ этого уравненія выраженъ въ формѣ (2).

Эта задача можетъ быть рѣшена лишь въ томъ случаѣ, когда число n дано. Въ такомъ случаѣ мы можемъ составить всѣ формы дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ общій интегралъ въ формѣ (2) и содержащихъ y въ той же степени, какъ и данное уравненіе (23). Потомъ останется узнать, заключается ли данное уравненіе въ одной изъ найденныхъ формъ.

Зависимость между Кинкелиновыми и гаммаморфными функциями.

В: П. Алексѣевского.

Подъ названіемъ функций Кинкелина г. Бопенъ ¹⁾ разумѣетъ функции $K_n(x)$, удовлетворяющія уравненію

$$K_n(x+1) = x^{x^n} K_n(x)$$

при условіи $K_n(1) = 1$.

Функция $K_0(x)$ совпадаетъ съ Эйлеровой функцией $\Gamma(x)$; функция $K_1(x)$ была указана и изучена Кинкелиномъ; начало изслѣдованій функций высшихъ порядковъ было положено Глешеромъ.

Тому-же вопросу посвященъ недавно вышедшій мемуаръ г. Бопэна. Въ послѣдней главѣ авторъ показываетъ связь между функцией $K_1(x)$ и функцией $G(x)$, свойства которой были изучены мною, и строить классъ функций, представляющихъ обобщеніе функции $G(x)$. Повидимому г. Бопэну не было извѣстно, что функция $G(x)$ является лишь простѣйшей представительницей функций, подобныхъ функции гамма, основаніе теоріи которыхъ было дано мною ²⁾ и недавно изложено въ новой формѣ г. Барнесомъ въ рядѣ мемуаровъ ³⁾.

¹⁾ Beaupin. .. Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin.

Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique. T. 59.

²⁾ „О функцияхъ подобныхъ функции гамма“. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества. 2 Сер. т. I.

³⁾ Barnes. „The Theory of the G Function“. Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 31.

Barnes. „Genesis of the Double Gamma Function“. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 31.

Barnes. „The Theory of the Double Gamma Function“. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 196.

Въ этой статьѣ я показываю, что теорія Кинкелиновыхъ функцій находится въ самой тѣсной связи съ теоріей функцій, подобныхъ функціи гамма $G_n(x)$: *вся* функція Кинкелина могутъ быть составлены изъ функцій $G_n(x)$ и обратно. То-же заключеніе справедливо и для функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$.

Небезъинтересно замѣтить, что выраженіе Кинкелиновыхъ функцій въ зависимости отъ функцій $G_n(x)$ требуетъ возвышенія послѣднихъ въ степени, показатели которыхъ суть цѣлыя рациональныя функціи x , тогда какъ составъ функцій Якоби, Гейне, Аппеля, модульныхъ Эрмита и, слѣдовательно, двуперіодическихъ гораздо проще: они сводятся къ произведеніямъ или частнымъ функцій подобныхъ функціи гамма ¹⁾.

1. Дифференціальное уравненіе между двумя послѣдовательными гамма-морфными функціями.

Прежде чѣмъ приступить къ выводу вышеупомянутыхъ зависимостей, я остановлюсь на обобщеніи нѣкоторыхъ свойствъ функцій, подобныхъ функціи гамма, которыя дальше для краткости я буду называть *гамма-морфными*.

Простѣйшій классъ гаммаморфныхъ функцій характеризуется функціональнымъ уравненіемъ:

$$G_n(x+1) = G_{n-1}(x) G_n(x) \quad (1)$$

при чемъ

$$G_0(x) = \Gamma(x), \quad G_1(x) = G(x),$$

слѣдовательно

$$G_1(x+1) = \Gamma(x) G_1(x). \quad (2)$$

Выборъ рѣшеній ограничивается слѣдующимъ условіемъ.

Такъ какъ общее рѣшеніе уравненій (1) и (2) получается умноженіемъ частнаго рѣшенія на произвольную періодическую функцію съ періодомъ, равнымъ единицѣ, то, по опредѣленію, подъ $G_n(x)$ мы разумѣемъ функцію не разлагаемую на рѣшеніе того же уравненія (1) и періодическую функцію.

Кромѣ того функція $G_n(x)$ подчинены условію:

$$G_n(1) = 1.$$

Разсмотримъ логарифмическія производныя тѣхъ-же функцій. Положимъ для краткости обозначеній:

$$D \log G_n(x) = \phi_n(x), \quad D \log \Gamma(x) = \psi(x).$$

¹⁾ (см. мою статью: „Über eine Classe von Functionen, die der Gammafunction analog sind“. Berichte der Sächs. Gesellschaft zu Leipzig. Math.-Phys. Cl. Bd. 6.

Функции $\phi_n(x)$ въ силу равенствъ (1) и (2) опредѣляются функциональными уравненіями такой формы:

$$\begin{aligned}\phi_n(x+1) - \phi_n(x) &= \phi_{n-1}(x), \\ \phi_1(x+1) - \phi_1(x) &= \psi(x).\end{aligned}\tag{3}$$

Основнымъ предложеніемъ въ теоріи гаммаморфныхъ функций служить дифференціальное уравненіе ¹⁾:

$$D \log G_1(x+1) = x D \log \Gamma(x) - (x-1) + D \log G_1(1),$$

которое въ новыхъ обозначеніяхъ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\phi_1(x+1) = x\psi(x) - (x-1) + \phi_1(1).\tag{4}$$

Установимъ соответственное уравненіе для функций ϕ высшихъ порядковъ.

Пользуясь символомъ Δ для обозначенія разности, въ силу равенствъ (3) мы можемъ представить уравненіе (4) такъ:

$$\Delta \phi_2(x+1) = x \Delta \phi_1(x) - (x-1) + \phi_1(1).$$

Замѣтивъ, что

$$x \Delta \phi_1(x) = \Delta [x \phi_1(x) - \phi_2(x+1)],$$

находимъ, что

$$\phi_2(x+1) = x \phi_1(x) - \phi_2(x+1) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x \phi_1(1) + C.$$

Опредѣливъ постоянное C , полагая $x=0$, получимъ окончательно

$$2\phi_2(x+1) = x \phi_1(x) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x \phi_1(1) + 2\phi_2(1).\tag{5}$$

Переходъ отъ уравненія (4) къ (5) есть не что иное, какъ интегрированіе въ конечныхъ разностяхъ уравненія (4), поэтому, не повторя однихъ и тѣхъ-же разсужденій, можемъ сразу получить общій результатъ, взявъ конечный интегралъ $(n-1)$ -го порядка отъ обѣихъ частей уравненія (4) и опредѣливъ каждое изъ произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ, полагая $x=0$.

Такимъ способомъ получимъ:

$$n \phi_n(x+1) = x \phi_{n-1}(x) + Q_n(x),\tag{A}$$

¹⁾ См. „О функцияхъ подобныхъ функциіи гамма“. § 3.

гдѣ $Q_n(x)$ — полиномъ n -ой степени, именно

$$Q_n(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} + \\ + \sum_{k=1}^{k=n} k\phi_k(1) \frac{x(x-1)\dots(x-n+k+1)}{(n-k)!}.$$

Уравненіе (A) и есть искомое.

Интегрируя послѣднее уравненіе отъ 0 до x , получимъ:

$$n \log G_n(x+1) = x \log G_{n-1}(x) - \int_0^x \log G_{n-1}(x) dx + \int_0^x Q_n(x) dx. \quad (B)$$

Отсюда, полагая $x=1$ и перемѣнивъ n на $n+1$, находимъ:

$$\int_0^1 \log G_n(x) dx = \int_0^1 Q_{n+1}(x) dx.$$

Ясно, что искомый интегралъ есть линейная функція постоянныхъ $\phi_1(1), \phi_2(1), \dots, \phi_{n+1}(1)$; причемъ важно замѣтить, что въ число необходимыхъ постоянныхъ для опредѣленія интеграла отъ функціи n -го порядка входитъ $\phi_{n+1}(1)$.

2. Выраженіе гаммаморфныхъ функцій въ зависимости отъ производной отъ $\log \Gamma(x)$.

Изъ того-же уравненія (A) слѣдуетъ, что всякая функція $\phi_n(x)$ можетъ быть выражена посредствомъ функціи $\psi(x)$. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ этомъ уравненіи x на $x+n-1$, найдемъ:

$$n\phi_n(x+n) = (x+n-1)\phi_{n-1}(x+n-1) + Q_n(x+n-1).$$

Слѣдовательно,

$$(n-1)\phi_{n-1}(x+n-1) = (x+n-2)\phi_{n-2}(x+n-2) + Q_{n-1}(x+n-2),$$

.....

$$2\phi_2(x+2) = (x+1)\phi_1(x+1) + Q_2(x+1),$$

$$\phi_1(x+1) = x\psi(x) + Q_1(x).$$

Исключивъ изъ этой системы $\phi_1(x+1), \dots, \phi_{n-1}(x+n-1)$, получимъ

$$n! \phi_n(x+n) = x(x+1), \dots, (x+n-1) \psi(x) + R_n(x) \quad (C)$$

гдѣ $R_n(x)$ полиномъ n -ой степени.

Итакъ, производная логариема гаммаморфной функціи есть линейная функція отъ производной логариема $\Gamma(x)$ съ цѣлыми рациональными коэффициентами.

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей уравненія (C) въ предѣлахъ отъ 0 до x и замѣтивъ, что $G_n(n) = 1$, въ чемъ легко убѣдиться съ помощью равенства (1), получимъ

$$\begin{aligned} n! \log G_n(x+n) = \\ = \int_0^x x(x+1) \dots (x+n-1) \psi(x) dx + \int_0^x R_n(x) dx. \end{aligned} \quad (D)$$

Таково выраженіе логариема гаммаморфной функціи въ зависимости отъ функціи $\psi(x)$.

3. *Выраженіе Кинкелиновыхъ функцій посредствомъ гаммаморфныхъ и обратно.*

Перейдемъ теперь къ установленію зависимости между функціями $K_n(x)$ и $G_n(x)$.

Основное уравненіе, характерное для Кинкелиновыхъ функцій, можетъ быть записано въ такой формѣ:

$$\log K_n(x+1) - \log K_n(x) = x^n \log x. \quad (6)$$

По свойству функціи $\Gamma(x)$ имѣемъ

$$\Delta[x^n \log \Gamma(x)] = x^n \log x + \Delta x^n \log \Gamma(x+1).$$

Точно также по свойству (1) функцій $G_n(x)$, находимъ

$$\Delta[\Delta x^n \log G_1(x+1)] = \Delta x^n \log \Gamma(x+1) + \Delta^2 x^n \log G_1(x+2),$$

$$\Delta[\Delta^2 x^n \log G_2(x+2)] = \Delta^2 x^n \log G_1(x+2) + \Delta^3 x^n \log G_2(x+3),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta[\Delta^n x^n \log G_n(x+n)] = \Delta^n x^n \log G_{n-1}(x+n),$$

гдѣ $\Delta^n x^n = n!$

Изъ этихъ равенствъ не трудно обнаружить слѣдующее тождество

$$x^n \log x = \Delta \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k x^n \cdot \log G_k(x+k).$$

Внося это выраженіе въ равенство (6), находимъ

$$\log K_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta^k x^n \cdot \log G_k(x+k) + C.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что

$$K_n(1) = 1, \quad G_n(1) = 1, \quad G_k(1+k) = 1$$

заключаемъ, что *постоянное* $C = 0$.

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \log K_n(x) &= x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n \cdot \log G_1(x+1) + \\ &+ \Delta^2 x^n \cdot \log G_2(x+2) - \dots + (-1)^n \Delta^n x^n \cdot \log G_n(x+n). \end{aligned} \quad (E)$$

Этотъ выводъ въ силу равенствъ (1) можно формулировать такъ:
логарифмъ всякой Кинкеллиновой функціи есть линейная функція логарифмовъ гамма-морфныхъ функцій съ цѣлыми рациональными коэффициентами.

Изъ обзора уравненій

$$\log K_1(x) = x \log \Gamma(x) - \log G_1(x+1)$$

$$\log K_2(x) = x^2 \log \Gamma(x) - \Delta x^2 \log G_1(x+1) + 2! \log G_2(x+2)$$

.....

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n \log G_1(x+2) + \dots + (-1)^n n! \log G_n(x+n)$$

ясно, что и обратно, *логарифмъ всякой гамма-морфной функціи $G_n(x)$ есть линейная функція логарифмовъ Кинкеллиновыхъ функцій съ цѣлыми рациональными коэффициентами относительно x .*

И, дѣйствительно, рѣшеніе приведенной системы даетъ:

$$\begin{aligned} n! \log G_n(x+n) &= \\ &= P_n \log \Gamma(x) - P'_n \log K_1(x) + \frac{P''_n}{2!} \log K_2(x) - \dots + (-1)^n \frac{P''_n}{n!} \log K_n(x). \end{aligned} \quad (F)$$

гдѣ

$$P_n = x(x+1) \dots (x+n-1),$$

а P'_n, P''_n, \dots суть производныя отъ P_n .

4. Зависимость между основными постоянными обѣихъ системъ функций.

Мы видѣли въ § 1 какую важную роль играютъ постоянныя $\phi_1(1), \phi_2(1) \dots$ въ теоріи функций G_n . Эти постоянныя могутъ быть замѣнены другими системами, между прочимъ вышеупомянутыми интегралами

$$\int_0^1 \log G_n(x) dx.$$

Аналогичныя постоянныя имѣютъ огромное значеніе для Кинкелиновыхъ функций. За основную систему въ теоріи Кинкелиновыхъ функций Глешеръ и Бопанъ принимаютъ постоянныя ω_{n-1} , которыя опредѣляются такъ:

$$\int_0^1 \log K_n(x) dx = \frac{1}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Для того, чтобы установить связь между обѣими системами постоянныхъ, мы выведемъ выраженіе производной отъ $\log K_n(x)$ изъ формулы (E).

Посредствомъ дифференцированія, получимъ:

$$\begin{aligned} D \log K_n(x) &= n [x^{n-1} \log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1} \log G_1(x+1) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_{n-1}(x+n-1)] + R_n(x), \end{aligned}$$

гдѣ

$$R_n(x) = x^n \psi(x) - \Delta x^n \phi_1(x+1) + \dots + (-1)^n \Delta^n x^n \phi_n(x+n). \quad (7)$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ $\log K_{n-1}(x)$, слѣдовательно

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Для опредѣленія вида функции $R_n(x)$ составимъ разность

$$R_n(x+1) - R_n(x) = \Delta R_n(x).$$

Вычисленіе этой разности въ силу равенствъ (3) даетъ

$$\Delta R_n(x) = x^{n-1}.$$

Назовемъ чрезъ $B_n(x)$ полиномъ Бернулли, написанный въ такой формѣ, что

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x^{n-1}.$$

Черезъ сличеніе этихъ результатовъ, находимъ

$$R_n(x) = B_n(x) + A_n \quad (8)$$

гдѣ A_n постоянное.

Отсюда, полагая $x = 0$ и замѣтивъ, что $B_n(0) = 0$, получимъ

$$A_n = R_n(0).$$

Для опредѣленія $R_n(0)$ изъ формулы (7) необходимо напомнить, что 0 есть полюсъ функціи $\psi(x)$, причемъ изъ функціональнаго уравненія

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$$

непосредственно слѣдуетъ, что

$$[x\psi(x)]_{x=0} = -1.$$

Вслѣдствіе этого равенство (7) даетъ при $n > 1$

$$A_n = -\Delta 0^n \phi_1(1) + \Delta^2 0^n \phi_2(2) - \dots + (-1)^n \Delta^n 0^n \phi_n(n). \quad (9)$$

Въ случаѣ же $n = 1$, получимъ

$$A_1 = -1 - \phi_1(1). \quad (10)$$

Изъ соотношеній (3) ясно, что A_n представляетъ линейную функцію постоянныхъ $\phi_1(1), \phi_2(1), \dots, \phi_n(1)$.

Опредѣливъ составъ постоянныхъ A_n , мы можемъ остановиться на слѣдующемъ выраженіи производной $\log K_n(x)$:

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + A_n. \quad (11)$$

Обращаясь къ мемуару Бопэна на стр. 20 мы находимъ слѣдующую зависимость:

$$\log K_n(x) = n \int_0^x \log K_{n-1}(x) dx + \frac{1}{n} B_{n+1}(x) - \frac{n}{2} x \log \omega_{n-1}.$$

Откуда чрезъ дифференцированіе находимъ

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + \frac{1}{n} B_{n+1}(x) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Имѣя въ виду, что по свойству Бернуллиевыхъ функцій

$$B'_{n+1}(x) = n B_n(x) + B'_{n+1}(0),$$

получимъ

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Сравнивая двѣ формы производной $\log K_n(x)$, находимъ

$$A_n = \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}. \quad (12)$$

Замѣтимъ еще, что полагая $x = 1$, получимъ

$$A_n = D \log K_n(1).$$

5. Выраженіе функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$, посредствомъ гамма-морфныхъ и обратно.

Обратимся къ обобщенію функцій $G_1(x) = G(x)$, данному г. Бопэномъ.

Замѣтивъ соотношеніе

$$G_1(x) = \frac{\Gamma^{x-1}(x)}{K_1(x)},$$

Бопэнъ составляетъ такія функціи,

$$J_n(x) = \frac{K_{n-1}^{x-1}(x)}{K_n(x)}.$$

Очевидно, что $J_1(x)$ тождественно съ $G_1(x)$, но остальные функціи $J_n(x)$ суть новыя функціи.

Изъ этого опредѣленія по свойству Кинкелиновыхъ функцій слѣдуетъ, что

$$J_n(x+1) = K_{n-1}(x) J_n(x)$$

и

$$J_n(1) = 1.$$

Чтобы обнаружить выраженіе функцій $J_n(x)$ чрезъ посредство гамма-морфныхъ функцій, логарифмируемъ предыдущее равенство; получимъ:

$$\log J_n(x+1) - \log J_n(x) = \log K_{n-1}(x).$$

Слѣдовательно, $\log J_n(x)$ представляет конечный интегралъ отъ $\log K_{n-1}(x)$.

Принимая во вниманіе, что по доказанному имѣемъ

$$\begin{aligned} \log K_{n-1}(x) &= \\ &= x^{n-1} \log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1} \log G_1(x+1) + \\ &+ \Delta^2 x^{n-1} \log G_2(x+1) - \dots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_{n-1}(x+n-1), \end{aligned}$$

черезъ конечное интегрированіе, прилагая справа методъ интеграціи по частямъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \log J_n(x) &= \\ &= x^{n-1} \log G_1(x) - 2 \Delta x^{n-1} \log G_2(x+1) + \\ &+ 3 \Delta^2 x^{n-1} \log G_3(x+2) - \dots + (-1)^{n-1} n \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_n(x+n-1). \quad (G) \end{aligned}$$

Откуда слѣдуетъ, что обратно

$$\begin{aligned} n! \log G_n(x+n-1) &= P_{n-1} \log G_1(x) - P'_{n-1} \log J_2(x) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} \frac{P_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \log J_n(x) \end{aligned} \quad (H)$$

гдѣ

$$P_{n-1} = x(x+1) \dots (x+n-2).$$

6. *Выраженіе тѣхъ-же функций посредствомъ кратнаго интеграла отъ логарифма функции $G_1(x)$.*

Равенство (G) даетъ выраженіе $\log J_n(x)$ въ зависимости отъ системы функций G_1, G_2, \dots, G_n ; можно показать, что $J_n(x)$ зависитъ исключительно отъ первой изъ нихъ $G_1(x)$.

Прежде всего это обнаруживается для J_2 . Полагая въ формулѣ (G) $n = 2$, находимъ

$$\log J_2(x) = x \log G_1(x) - 2 \log G_2(x+1).$$

Полагая же въ формулѣ (B) тоже $n = 2$, получимъ:

$$2 \log G_2(x+1) = x \log G_1(x) - \int_0^x \log G_1(x) dv + \int_0^x Q_2(x) dx.$$

Черезъ сравненіе этихъ двухъ тождествъ имѣемъ

$$\log J_2(x) = \int_0^x \log G_1(x) dx - \int_0^x Q_2(x) dx.$$

Для обобщенія этого вывода, найдемъ сначала выраженіе производной отъ $\log J_n(x)$.

Изъ формулы (G) находимъ:

$$\begin{aligned} D \log J_n(x) &= \\ &= (n-1)[x^{n-2} \log G_1(x) - 2 \Delta x^{n-2} \log G_2(x+1) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-2} (n-1) \Delta^{n-2} x^{n-2} \log G_{n-1}(x+n-2)] + S_n(x), \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \\ &= x^{n-1} g_1(x) - 2 \Delta x^{n-1} g_2(x+1) + \dots + (-1)^{n-1} n \Delta^{n-1} x^{n-1} g_n(x+n-1). \end{aligned}$$

Составивъ разность отъ $S_n(x)$, находимъ

$$\begin{aligned} S_n(x+1) - S_n(x) &= \\ &= x^{n-1} p(x) - \Delta x^{n-1} g_1(x+1) + \dots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} g_n(x+n-1). \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть съ формулой (7) и принимая во вниманіе равенство (8), получимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) = B_{n-1}(x) + A_{n-1}.$$

Такъ какъ $B_{n-1}(x)$ есть полиномъ $(n-1)$ -ой степени, то $S_n(x)$ будетъ полиномъ n -ой степени, выраженіе котораго не трудно найти.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ тождества

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x [B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)]$$

слѣдуетъ, что

$$S_n(x) = (x-1) B_{n-1}(x) - B_n(x) + A_{n-1}x + S_n(0).$$

Постоянное $S_n(0)$ получается безъ затрудненій изъ первоначальнаго выраженія $S_n(x)$, принявъ во вниманіе, что

$$[x g_1(x)]_{x=0} = 1.$$

Выяснив это обстоятельство, имѣемъ

$$D \log J_n(x) = (n-1) J_{n-1}(x) + S_n(x).$$

Отсюда, дифференцируя $(n-2)$ раза, получимъ

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1) D^{n-2} J_{n-1}(x) + F_n^2(x)$$

гдѣ $F_n^2(x)$ полиномъ 2-й степени.

Замѣняя въ предыдущей формулѣ n чрезъ $n-1$, $n-2$, ..., 2, получимъ рядъ аналогичныхъ равенствъ

$$D^{n-2} \log J_{n-1}(x) = (n-2) D^{n-3} \log J_{n-2}(x) + F_{n-1}^2(x)$$

.....

$$D \log J_2(x) = \log G_1(x) + F_2^2(x).$$

Слѣдовательно, путемъ исключенія получимъ:

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1)! \log G_1(x) + F_n^2(x),$$

гдѣ $F_n^2(x)$ — опять полиномъ второй степени.

Интегрируя это равенство $(n-1)$ разъ въ предѣлахъ отъ 0 до x , находимъ:

$$\log J_n(x) = (n-1)! \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \log G_1(x) dx^{n-1} + F_n^{n+1}(x). \quad (J)$$

Итакъ, логарифмъ $J_n(x)$ отличается отъ интеграла $(n-1)$ -й кратности отъ $\log G_1(x)$ на полиномъ $(n+1)$ -ой степени.

7. Обобщеніе.

Строеніе функціональнаго уравненія Кинкелиновыхъ функцій указываетъ на возможность разнообразныхъ обобщеній; на примѣръ, выраженіе каждой изъ функцій $F_n^*(x)$, удовлетворяющихъ одному изъ уравненій

$$F_n^*(x+1) = G_j^{x^n}(x) \cdot F_n^*(x)$$

$$F_n^*(x+1) = K_j^{x^n}(x) \cdot F_n^*(x)$$

$$F_n^*(x+1) = J_j^{x^n}(x) \cdot F_n^*(x)$$

можетъ быть найдено приѣмомъ, указаннымъ выше.

Логарифмъ каждой изъ такихъ функций $F_n(x)$ представляетъ линейную функцию логарифмовъ гаммаморфныхъ функций съ цѣлыми рациональными коэффициентами.

Выборъ показателя въ формѣ x^* не существенъ: предыдущее заключеніе остается неизмѣннымъ, если примемъ показателемъ какую угодно цѣлую рациональную функцию x ; поэтому къ той-же категоріи относится функция $F_n(x)$, опредѣляемая уравненіемъ:

$$F_n(x+1) = x^{r_0(x)} \cdot G_j^{r_1(x)}(x) \cdot K_\mu^{r_2(x)} \cdot J_q^{r_3(x)} \cdot F_n(x).$$

гдѣ r_0, r_1, r_2, r_3 суть цѣлыя рациональныя функции x .

REMARQUES RELATIVES AUX FORMULES SOMMATOIRES D'EULER ET DE BOOL

PAR
W. Stekloff.

1. On sait beaucoup de démonstrations simples de la formule sommatoire d'Euler. Néanmoins je me permets de publier quelques remarques relatives à cette formule, ainsi qu' à la formule analogue de M. Bool, qui me semblent non dénuées d'intérêt au point de vue didactique.

Je vais attirer l'attention sur ce fait qu'on peut déduire les formules en question, ainsi qu'étudier les propriétés fondamentales des polynômes qui s'y rattachent, par un procédé uniforme et très élégant, en partant d'une formule élémentaire, qu'on peut considérer en même temps comme une formule sommatoire générale contenant comme des cas très particuliers celles d'Euler et de Bool.

2. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de la variable réelle x admettant les dérivées de n premiers ordres dans un intervalle quelconque (a, b) .

Désignons par $g^{(k)}(-x)$ la dérivée d'ordre k de $g(x)$, où l'on remplace x par $-x$.

Faisant dans l'identité

$$f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(-x) - f^{(k-1)}(x) g^{(n-k+1)}(-x) = \frac{d}{dx} [f^{(k-1)}(x) g^{(n-k)}(-x)]$$

successivement $k = 1, 2, 3, \dots, n$ et additionnant, on trouve

$$f^{(n)}(x) g(-x) - f(x) g^{(n)}(-x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(x) g^{(n-k)}(-x),$$

d'où, en intégrant entre les limites a et b , on tire, après une réduction simple,

$$\begin{aligned} & f(b)g^{(n-1)}(-b) - f(a)g^{(n-1)}(-a) = \\ &= - \int_a^b f(x)g^{(n)}(-x)dx - \sum_{k=2}^n [f^{(k-1)}(b)g^{(n-k)}(-a) - f^{(k-1)}(b)g^{(n-k)}(-a)] + \\ & \quad + \int_a^b f^{(n)}(x)g(-x)dx. \end{aligned} \quad (1)$$

C'est la formule de Kronecker.

3. Posons $b = a + h$, et

$$g(x) = \varphi\left(-\frac{x+a}{h}\right).$$

On aura

$$g^{(n-k)}(-x) = \frac{(-1)^{n-k}}{h^{n-k}} \varphi^{(n-k)}(z), \quad z = \frac{x-a}{h}.$$

L'égalité (1) devient

$$\begin{aligned} & f(a+h)\varphi^{(n-1)}(1) - f(a)\varphi^{(n-1)}(0) = \\ &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)\varphi^{(n)}\left(\frac{x-a}{h}\right)dx + \\ &+ \sum_{k=2}^n (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(a+h)\varphi^{(n-k)}(1) - f^{(k-1)}(a)\varphi^{(n-k)}(0)] + \\ &+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\varphi(z)dz, \end{aligned} \quad (2)$$

car

$$\int_a^{a+h} f^{(n)}(x)\varphi\left(\frac{x-a}{h}\right)dx = h \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\varphi(z)dz.$$

Remplaçant dans (2) a par $a + jh$, j étant un entier, faisant ensuite successivement $j = 0, 1, 2, \dots, m$ et additionnant les résultats, on trouve, après des réductions simples,

$$\begin{aligned}
 & [\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^m f(a + jh) = \\
 & = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx + \\
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b) \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a) \varphi^{(n-k)}(1)] + \quad (3) \\
 & + \sum_{k=2}^n (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^m f^{(k-1)}(a + jh) + \\
 & + (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a + jh + hz) dz.
 \end{aligned}$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker ¹⁾.

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n .

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0), \quad (k=2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (5)$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \quad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

¹⁾ Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale“. Leipzig. 1891, p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = A_k + z \frac{A_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + z^{k-1} \frac{A_1}{(k-1)!} + z^k \frac{A_0}{k!}. \quad (7)$$

($k=0, 1, 2, \dots, n$)

En posant $z=1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1} + \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + \frac{A_1}{(k-1)!} + \frac{A_0}{k!} = 0. \quad (8)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}. \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.

Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n = 0, \quad A_0 = 1. \quad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynôme

$$\varphi(z) = \frac{z^n}{n!} + z^{n-1} \frac{A_1}{(n-1)!} + z^{n-2} \frac{A_2}{(n-2)!} + \dots + z^2 \frac{A_{n-2}}{2!} + z A_{n-1}, \quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0 = 1$.

En prenant pour n les valeurs entières à partir de $n=2, 3, \dots$, nous obtiendrons une suite de polynômes de degré 2, 3, ... qu'on appelle *polynômes de Bernoulli*.

6. Désignons maintenant le polynôme de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(n-k)}(1-z) &= A_k - z \frac{A_{k-1}}{1!} + \\ &+ z^2 \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)!} + (-1)^k \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

et dans (7) $k=2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \quad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \quad (12)$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \quad (13)$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3z + \text{Const.} = 2A_3z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1} \varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \quad \text{pour } k=2, 3, 4. \quad (14)$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k ; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) - (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1}z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k=2, 3, 4, \dots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \quad \text{pour } k \text{ impair.} \quad (15)$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1} \varphi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n .

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) \varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m f(a+jh) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \\ &+ \sum_{k=2}^n h^{k-1} A_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \\ &+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz) dz, \end{aligned}$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^*$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^m f^{(n)}[a+h(j+z)] dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies“ (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élégante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\varphi(z)$ et je poserai

$$\varphi^{(n-k)}(0) = C_k. \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = C_k + z \frac{C_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{k-2}}{2!} + \dots + z^{k-1} \frac{C_1}{(k-1)!} + z^k \frac{C_0}{k!}, \quad (17)$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k + \frac{C_{k-1}}{1!} + \frac{C_{k-2}}{2!} + \dots + \frac{C_1}{(k-1)!} + \frac{C_0}{k!} = 0. \quad (18)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes C_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0 = 1$, nous obtiendrons le polynome $\varphi(z)$ de degré n , complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n=1, 2, 3, \dots$, nous construirons une suite de polynomes de degré $1, 2, 3, \dots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\varphi_n(z)$ ($n=1, 2, 3, \dots$):

$$\varphi_n(z) = C_n + z \frac{C_{n-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-2}}{2!} + \dots + z^{n-1} \frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!}, \quad (19)$$

C_k ($k=1, 2, \dots, n$) étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0 = 1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$\begin{aligned} & -\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = \\ & = C_k - z \frac{C_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{k-2}}{2!} - \dots + (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{C_1}{(k-1)!} - (-1)^k \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\begin{aligned}\psi_n^{(n-2)}(z) &= C_2 + z \frac{C_1}{1!} + \frac{z^2}{2!}, \\ -\psi_n^{(n-2)}(1-z) &= C_2 - z \frac{C_1}{1!} - \frac{z^2}{2!},\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z) - \psi_n^{(n-2)}(1-z) = 2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2 = 0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\begin{aligned}\psi_n^{(n-3)}(z) + \psi_n^{(n-3)}(1-z) &= \text{Const.} = 0, \\ \psi_n^{(n-4)}(z) - \psi_n^{(n-4)}(1-z) &= \text{Const.} = 2C_4,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4 = 0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1} \psi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \quad \text{pour } k=2, 3, 4. \quad (20)$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=2, 3, \dots, n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k = 0 \quad \text{pour } k \text{ pair.} \quad (21)$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z) + (-1)^{n-1} \psi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z) = z \frac{C_{n-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-2}}{2!} + \dots + z^{n-1} \frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair.} \quad (22)$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z \frac{C_{n-2}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-3}}{2!} + \dots + z^{n-2} \frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n ,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \quad (23)$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \quad (24)$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-2} \leq \alpha_{n-4} \leq \dots \leq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que le polynôme $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.

Supposons maintenant que n soit impair.

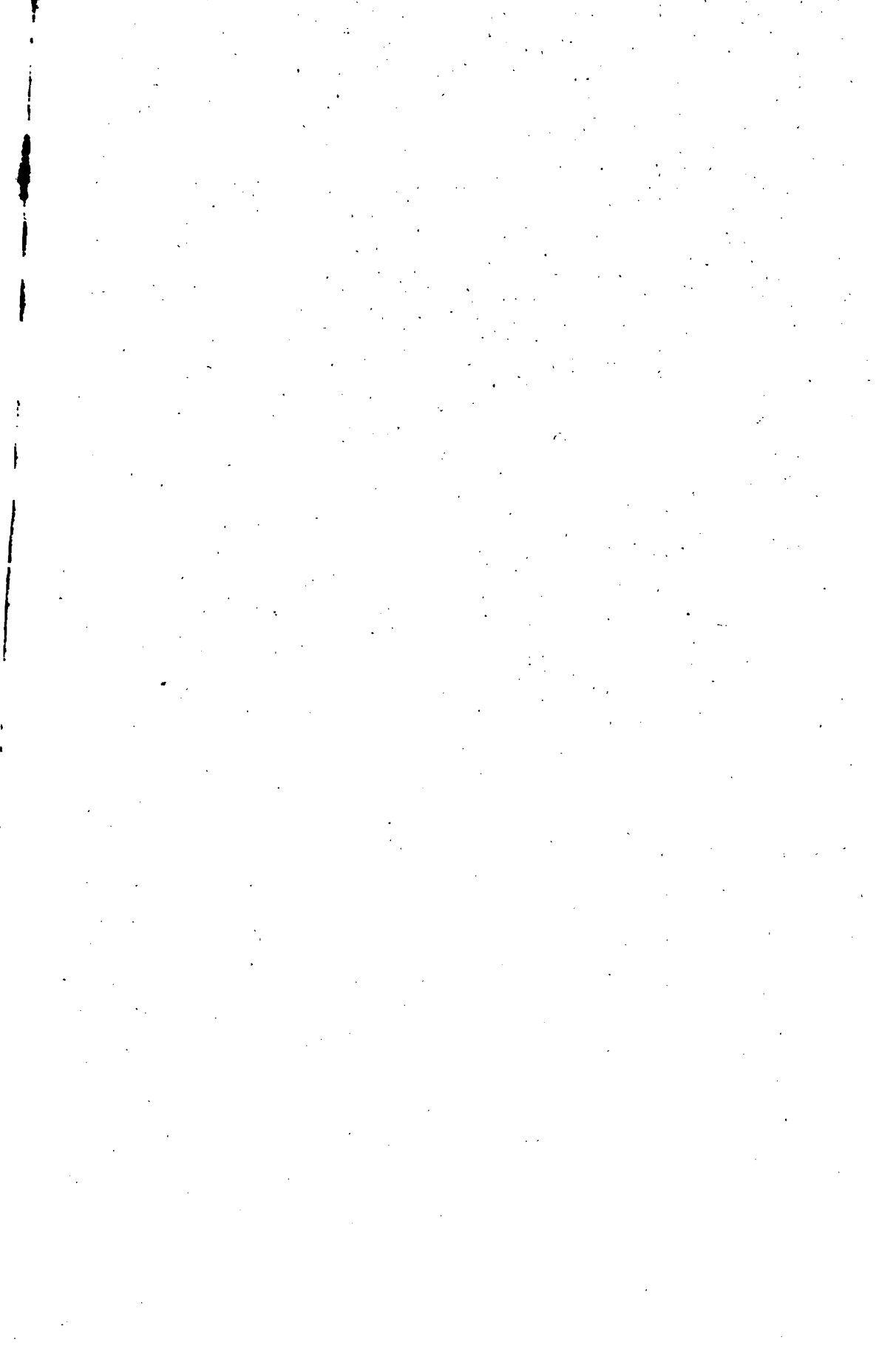
L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que le polynôme $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m + 1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z) dz. \quad (25)$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1} .



СОДЕРЖАНІЕ.

	<i>Стран.</i>
Объ инвариантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ; <i>Д. Мордухай-Болтовского</i>	49
Математическая задача объ универсальныхъ колебаніяхъ; <i>А. Корна</i>	68
Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка; <i>В. П. Ермакова</i>	113
Зависимость между Кинкелиновыми и гамморфными функциями; <i>В. П. Алексѣевскаго</i>	123
Замѣтки о формулахъ суммированія Эйлера и Буля; <i>В. А. Стеклова</i>	136

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества

издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

	<i>Pages.</i>
Sur les transformations invariantes des intégrales ultraelliptiques; par <i>D. Mordoukay-Boltowsky</i>	49
Sur le problème mathématique des vibrations universelles; par <i>A. Korn.</i>	68
Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre; par <i>W. Ermakoff</i>	113
Relations entre les fonctions de M. Kinkelin et les fonctions gammamorphes; par <i>W. Alexievsky</i>	123
Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Boole; par <i>W. Stekloff</i>	136

Sci 905. 75 *Math. Hall*

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-е série, Tome VIII, ~~№ 4~~ и 5.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№№ 4 и 5.

ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.

(Рибная улица, домъ № 30-я).

1904.



$$\begin{aligned}
 & [\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^m f(a + jh) = \\
 & = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) \varphi^{(n)} \left(\frac{x-a-jh}{h} \right) dx + \\
 & + \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b) \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a) \varphi^{(n-k)}(1)] + \quad (3) \\
 & + \sum_{k=2}^n (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^m f^{(k-1)}(a + jh) + \\
 & + (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a + jh + hz) dz.
 \end{aligned}$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker ¹⁾.

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n .

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0). \quad (k=2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0. \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (5)$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \quad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k. \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

¹⁾ Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale“. Leipzig. 1891. p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = A_k + z \frac{A_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + z^{k-1} \frac{A_1}{(k-1)!} + z^k \frac{A_0}{k!}. \quad (7)$$

($k=0, 1, 2, \dots, n$)

En posant $z=1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1} + \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + \frac{A_1}{(k-1)!} + \frac{A_0}{k!} = 0. \quad (8)$$

($k=2, 3, \dots, n$)

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}. \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.

Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n = 0, \quad A_0 = 1. \quad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynôme

$$\varphi(z) = \frac{z^n}{n!} + z^{n-1} \frac{A_1}{(n-1)!} + z^{n-2} \frac{A_2}{(n-2)!} + \dots + z^2 \frac{A_{n-2}}{2!} + z A_{n-1}, \quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0 = 1$.

En prenant pour n les valeurs entières à partir de $n=2, 3, \dots$, nous obtiendrons une suite de polynômes de degré 2, 3, ... qu'on appelle *polynômes de Bernoulli*.

6. Désignons maintenant le polynôme de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(n-k)}(1-z) &= A_k - z \frac{A_{k-1}}{1!} + \\ &+ z^2 \frac{A_{k-2}}{2!} + \dots + (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)!} + (-1)^k \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

et dans (7) $k=2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \quad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \quad (12)$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \quad (13)$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3z + \text{Const.} = 2A_3z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1} \varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \quad \text{pour } k=2, 3, 4. \quad (14)$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k ; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) - (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1}z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k=2, 3, 4, \dots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \quad \text{pour } k \text{ impair.} \quad (15)$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1} \varphi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n .

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) \varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m f(a+jh) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(b) + f(a)] + \\ &+ \sum_{k=3}^n h^{k-1} A_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + \\ &+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz) dz, \end{aligned}$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^k$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^m f^{(n)}[a+h(j+z)] dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies“ (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élégante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\psi(z)$ et je poserai

$$\psi^{(n-k)}(0) = C_k. \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

On a

$$\psi^{(n-k)}(z) = C_k + z \frac{C_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{k-2}}{2!} + \dots + z^{k-1} \frac{C_1}{(k-1)!} + z^k \frac{C_0}{k!}, \quad (17)$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k + \frac{C_{k-1}}{1!} + \frac{C_{k-2}}{2!} + \dots + \frac{C_1}{(k-1)!} + \frac{C_0}{k!} = 0. \quad (18)$$

($k=1, 2, 2, \dots, n$)

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes C_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0 = 1$, nous obtiendrons le polynome $\psi(z)$ de degré n , complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, \dots$, nous construirons une suite de polynomes de degré $1, 2, 3, \dots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\psi_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\psi_n(z) = C_n + z \frac{C_{n-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-2}}{2!} + \dots + z^{n-1} \frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!}, \quad (19)$$

C_k ($k=1, 2, \dots, n$) étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0 = 1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$\begin{aligned} & -\psi_n^{(n-k)}(1-z) = \\ & = C_k - z \frac{C_{k-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{k-2}}{2!} - \dots + (-1)^{k-1} z^{k-1} \frac{C_1}{(k-1)!} - (-1)^k \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\begin{aligned}\psi_n^{(n-2)}(z) &= C_2 + z \frac{C_1}{1!} + \frac{z^2}{2!}, \\ -\psi_n^{(n-2)}(1-z) &= C_2 - z \frac{C_1}{1!} - \frac{z^2}{2!},\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z) - \psi_n^{(n-2)}(1-z) = 2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2 = 0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\begin{aligned}\psi_n^{(n-3)}(z) + \psi_n^{(n-3)}(1-z) &= \text{Const.} = 0, \\ \psi_n^{(n-4)}(z) - \psi_n^{(n-4)}(1-z) &= \text{Const.} = 2C_4,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4 = 0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1} \psi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \quad \text{pour } k=2, 3, 4. \quad (20)$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=2, 3, \dots, n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k = 0 \quad \text{pour } k \text{ pair.} \quad (21)$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z) + (-1)^{n-1} \psi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z) = z \frac{C_{n-1}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-2}}{2!} + \dots + z^{n-1} \frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair.} \quad (22)$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z \frac{C_{n-2}}{1!} + z^2 \frac{C_{n-3}}{2!} + \dots + z^{n-2} \frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n ,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \quad (23)$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \quad (24)$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-2} \leq \alpha_{n-4} \leq \dots \leq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que le polynôme $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.

Supposons maintenant que n soit impair.

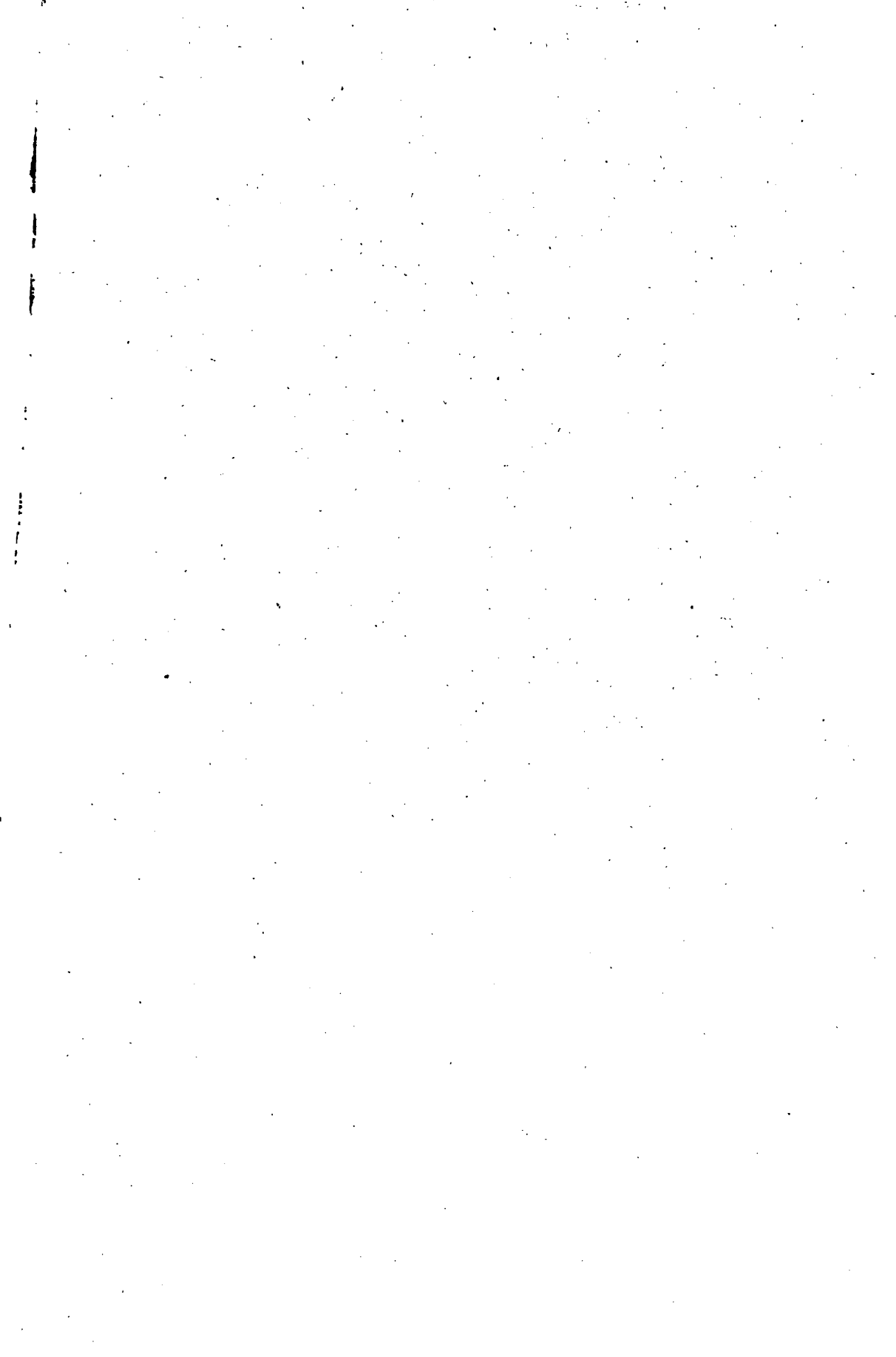
L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que le polynôme $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m+1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z) dz. \quad (25)$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1} .



Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(m-k)!} (n-1)^{m-k} + 2 \sum_{k=2}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\varphi_m(z)$ et des nombres C_m ,

$$\varphi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!} z - \frac{C_{m-2}}{2!} z^2 - \dots - \frac{C_1}{(m-1)!} z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(m-k)!} (n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2 \sum_{k=2}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2 \sum_{k=1}^m C_k \varphi_{n-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2 \sum_{k=1}^m C_k \varphi_{n-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z .

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1 \varphi_m(z) + 2C_3 \varphi_{m-2}(z) + 2C_5 \varphi_{m-4}(z) + \dots + 2C_m \varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\varphi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \dots + 2C_{m-1}\varphi_2(z) = 0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z , n par m . On aura

$$\frac{1}{2}\varphi_m(z) = \varphi_{m+1}(z) - 2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la théorie des polynomes de Bernoulli:

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \dots + C_{m-2}\varphi_3(z) + C_m z], \end{aligned}$$

si m est impair, et

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \dots + C_{m-3}\varphi_4(z) + C_{m-1}\varphi_2(z)], \end{aligned}$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z=1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ_1) ,

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}} = (-1)^{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!} B_k. \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(x+2k)^p} - \frac{1}{(x+2k+1)^p} \right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$\begin{aligned}
 f^{(s)}(x) &= \\
 &= (-1)^s p(p+1) \dots (p+s-1) \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}} - \frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}} \right), \\
 f^{(s)}(a+1) - f^{(s)}(a) &= \\
 &= (-1)^s p(p+1) \dots (p+s-1) \left[\frac{1}{a^{p+s}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}} \right], \\
 \int_a^{a+1} f(x) dx &= \frac{2}{1-p} \sum_{k=0}^m \left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right) - \\
 &- C_1 \frac{1-p}{2} \left(\frac{1}{a^p} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^p} \right) - \\
 &- C_3 \frac{(1-p)p(p+1)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}} \right) - \\
 &- \dots - C_{2n-1} \frac{(1-p)p(p+1) \dots (p+2n-3)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}} \right) + \\
 &\quad + R_{2n}, \tag{29}
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_{2n} = \frac{1}{2} (1-p)p(p+1) \dots (p+2n-1) \int_0^1 \psi_{2n}(z) \varphi(a+z) dz,$$

$$\varphi(a+z) = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}} \right).$$

Comme

$$\varphi(a+z) > 0 \quad \text{pour } a > 0, \quad 0 < z < 1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z) < \frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite ($p > 1$),

$$|R_{2n}| < \frac{(p-1)p(p+1)\dots(p+2n-1)}{a^{p+2n}} |C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a = 100, \quad m = 49, \quad p = 5, \quad n = 2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{(101+2k)^4} - \frac{1}{(102+2k)^4} \right) = \\ &= \frac{15}{2^5 \cdot 10^8} - \frac{3}{2^5 \cdot 10^9} + \frac{5.127}{2^8 \cdot 10^{14}} + R_4, \end{aligned}$$

où

$$|R_4| < \frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5 \cdot 10^8} = 0,0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8 \cdot 10^{14}} = 0,0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5 \cdot 10^9} = 0,000000000093750,$$

d'où

$$S = 0,0000000045937748,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100, \quad p = 5, \quad n = 3,$$

on trouve

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{2 \cdot 10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2,5}{10^{12}} - \frac{14}{10^{14}} = \\ &= 0,0000000051000264000, \end{aligned}$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1, \quad f(x) = \frac{d}{dx} \log u(x),$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)^{\lambda}} (x+3)^{(x+3)^{\lambda}} \dots (x+2m+1)^{(x+2m+1)^{\lambda}}}{x^{x^{\lambda}} (x+2)^{(x+2)^{\lambda}} \dots (x+2m)^{(x+2m)^{\lambda}}},$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k} \log u(a+1) u(a).$$

Or,

$$\log u(a+1) u(a) = \log \frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]^{\lambda}}}{a^{a^{\lambda}}} = \xi_1 - \xi_0,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]^{\lambda} \log [a+2(m+1)],$$

$$\xi_0 = a^{\lambda} \log a.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \xi_1^{(k)} - \xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s,$$

une suite des polynomes en λ , définis par les relations suivantes

$$\mu_0 = 1,$$

$$\mu_1 = \lambda + (\lambda - 1) \mu_0,$$

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2) \mu_1,$$

$$\mu_3 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + (\lambda - 3) \mu_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_s = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - s + 1) + (\lambda - s) \mu_{s-1}.$$

On trouve, pour $k \leq \lambda$,

$$\begin{aligned} \xi_1^{(k)} = & \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1) [a + 2(m + 1)]^{\lambda - k} \log [a + 2(m + 1)] + \\ & + \mu_{k-1} [a + 2(m + 1)]^{\lambda - k}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\xi_0^{(k)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1) a^{\lambda - k} \log a + \mu_{k-1} a^{\lambda - k}, \quad (30_1)$$

d'où

$$\xi_1^{(i)} = \lambda! \log [a + 2(m + 1)] + \mu_{\lambda-1},$$

$$\xi_0^{(i)} = \lambda! \log a + \mu_{\lambda-1}.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(i+s)} = (-1)^{s-1} (s-1)! \lambda! \frac{1}{[a + 2(m + 1)]^s}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \xi_0^{(i+s)} = & (-1)^{s-1} (s-1)! \lambda! \frac{1}{a^s}. \\ & (s = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (32)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1} \frac{d}{dx} \log u(x) dx = \log \frac{u(a+1)}{u(a)} = 2 \log r_\lambda(a, m) + \xi_1 - \xi_0,$$

où l'on a posé

$$v_{\lambda}(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{\lambda} (a+2)^{(a+2)\lambda} \dots (a+2m)^{(a+2m)\lambda}}{(a+1)^{(a+1)\lambda} (a+3)^{(a+3)\lambda} \dots (a+2m+1)^{(a+2m+1)\lambda}}. \quad (33)$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2 \log v_{\lambda}(a, m) = - (\xi_i - \xi_0) - C_1(\xi'_1 - \xi'_0) -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \dots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \dots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$Q_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \quad (34)$$

$$Q_s^{(\lambda)}[a+2(m+1)] =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \quad (35)$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1 \xi'_0 + C_3 \xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1} \xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \dots + C_{\lambda+2s-1} \xi_0^{(\lambda+2s-1)} + Q_s^{(\lambda)}(a). \quad (36)$$

On aura

$$R_s = \varrho_s^{(\lambda)}(a) - \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)]$$

et

$$\begin{aligned} 2 \log v_\lambda(a, m) &= Q_s(a) - \xi_1 - C_1 \xi'_1 - C_3 \xi_1^{(3)} - \\ &- \dots - C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \\ &- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)], \end{aligned} \quad (37)$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s + 1$,

$$\begin{aligned} 2 \log v_\lambda(a, m) &= Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1 \xi'_1 - C_3 \xi_1^{(3)} - \\ &- \dots - C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \\ &- C_{\lambda+2s+1} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)]. \end{aligned}$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$\begin{aligned} Q_{s+1}(a) &= Q_s(a) + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] - \\ &- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] + C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s+1)}, \end{aligned}$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m .

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] = \lim_{m=\infty} \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s , mais elle dépend, évidemment, de λ et de a , ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30₁) donnent

$$\begin{aligned} &\xi_0 + C_1 \xi'_0 + C_3 \xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} = \\ &= [a^\lambda + C_1 \lambda a^{\lambda-1} + C_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) a^{\lambda-3} + \dots + C_{\lambda-1} \lambda! a] \log a + p_\lambda(a), \end{aligned}$$

De cette identité on tire immédiatement les relations suivantes entre les nombres C_{2m-1} et A_{2m} , coefficients des polynomes de Bernoulli:

$$C_{2m-1} = 2(1 - 2^{2m}) A_{2m}. \quad (\delta)$$

Désignant par B_m les nombres de Bernoulli et en se rappelant que

$$A_{2m} = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m!},$$

on trouve

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m 2(2^{2m} - 1)}{2m!} B_m, \quad (\delta_1)$$

ou encore

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}(2m-1)!} D_m,$$

où

$$D_m = \frac{2^{2m}(2^{2m} - 1)}{2m} B_m \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

sont des nombres entiers, qui se rencontrent dans le développement bien connu

$$\operatorname{tang} x = D_1 \frac{x}{1!} + D_2 \frac{x^3}{3!} + \dots + D_m \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \dots$$

18. Posons maintenant dans (a)

$$n = 2m - 1, \quad z = 0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} & \frac{(2m-1)!}{2} [\psi_{2m-1}(2j) - C_{2m-1}] = \\ & = 1^{2m-1} - 0^{2m-1} + 3^{2m-1} - 2^{2m-1} + \dots + (2j-1)^{2m-1} - (2j-2)^{2m-1}. \end{aligned}$$

De cette égalité générale on tire, eu égard à (28₁),

$$\begin{aligned} 1 - 0 + 3 - 2 + 4 - 3 + \dots + (2j-1) - (2j-2) &= j, \\ 1^3 - 0^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \dots + (2j-1)^3 - (2j-2)^3 &= 4j^3 - 3j^2, \\ 1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 4^5 - 3^5 + \dots + (2j-1)^5 - (2j-2)^5 &= \\ &= 5j^3 - 20j^4 + 16j^5, \\ 1^7 - 0^7 + 3^7 - 2^7 + 4^7 - 3^7 + \dots + (2j-1)^7 - (2j-2)^7 &= \\ &= 64j^7 - 112j^8 + 70j^4 - 21j^2. \end{aligned}$$

Posons, par exemple, dans la 3^{me} de ces équations $j = 10$.
On trouve aisément

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 5^5 - 4^5 + \dots + 19^5 - 18^5 = 1400500.$$

19. De l'égalité (δ) on tire, en répétant les raisonnements du n° 17,

$$\frac{1}{2} [\varphi_{2m-1}(2z) - C_{2m-1}] = \varphi_{2m}(2z) - 2^{2m} \varphi_{2m}(z).$$

On peut donc écrire, eu égard à (γ),

$$\frac{1}{2} [\varphi_n(2z) - C_n] = \varphi_{n+1}(2z) - 2^{n+1} \varphi_{n+1}(z). \quad (\varepsilon)$$

Cette égalité a lieu toujours, quel que soit le nombre entier n , car $C_n = 0$ pour n pair.

20. Les formules (26) et (27) ont une grande analogie avec la formule classique d'Euler (Mac-Laurin) et peuvent avoir, comme celle-ci, des diverses applications intéressantes dont j'indiquerai quelques-unes dans ce qui va suivre.

Posons dans (26)

$$f(x) = x^{m-1}, \quad a = 0, \quad h = 1, \quad b = n - 1,$$

m et n étant des nombres entiers.

Remarquant que

$$f^{(k-1)}(x) = (m-1)(m-2) \dots (m-k+1)x^{m-k},$$

$$1^s + 2^s + 3^s + \dots + (n-1)^s = s! \varphi_{s+1}(n),$$

$\varphi_{s+1}(n)$ étant le polynome de Bernoulli, et que $C_k = 0$, si k est un nombre pair, on peut écrire

$$\begin{aligned} (m-1)! \varphi_m(n) &= \frac{(n-1)^m}{m} - \\ - \sum_{k=1}^{m-1} C_k (m-1)(m-2) \dots (m-k+1) (n-1)^{m-k} - 2 C_m (m-1)! + \\ + 2(m-1)! \sum_{k=2}^{m-1} C_k \varphi_{m-k+1}(n) + 2 C_m n (m-1)! = \\ = (m-1)! \left\{ \frac{(n-1)^m}{m} - \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(m-k)!} (n-1)^{m-k} + 2 \sum_{k=2}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n) \right\}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(m-k)!} (n-1)^{m-k} + 2 \sum_{k=2}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\psi_m(z)$ et des nombres C_m ,

$$\psi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!}z - \frac{C_{m-2}}{2!}z^2 - \dots - \frac{C_1}{(m-1)!}z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\psi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(m-k)!} (n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2 \sum_{k=2}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2 \sum_{k=1}^m C_k \varphi_{m-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2 \sum_{k=1}^m C_k \varphi_{m-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z .

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \dots + 2C_m\varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\varphi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \dots + 2C_{m-1}\varphi_2(z) = 0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z , n par m . On aura

$$\frac{1}{2}\varphi_m(z) = \varphi_{m+1}(z) - 2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la théorie des polynomes de Bernoulli:

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \dots + C_{m-2}\varphi_3(z) + C_m z], \end{aligned}$$

si m est impair, et

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \dots + C_{m-3}\varphi_4(z) + C_{m-1}\varphi_2(z)], \end{aligned}$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z=1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ₁),

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}} = (-1)^{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!} B_k. \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(x+2k)^p} - \frac{1}{(x+2k+1)^p} \right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$\begin{aligned}
 f^{(s)}(x) &= \\
 &= (-1)^s p(p+1) \dots (p+s-1) \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}} - \frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}} \right), \\
 f^{(s)}(a+1) + f^{(s)}(a) &= \\
 &= (-1)^s p(p+1) \dots (p+s-1) \left[\frac{1}{a^{p+s}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}} \right], \\
 \int_a^{a+1} f(x) dx &= \frac{2}{1-p} \sum_{k=0}^m \left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right) - \\
 &- C_1 \frac{1-p}{2} \left(\frac{1}{a^p} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^p} \right) - \\
 &- C_3 \frac{(1-p)p(p+1)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}} \right) - \\
 &- \dots - C_{2n-1} \frac{(1-p)p(p+1) \dots (p+2n-3)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}} \right) + \\
 &\quad + R_{2n}, \tag{29}
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_{2n} = \frac{1}{2} (1-p)p(p+1) \dots (p+2n-1) \int_0^1 \psi_{2n}(z) \varphi(a+z) dz,$$

$$\varphi(a+z) = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}} \right).$$

Comme

$$\varphi(a+z) > 0 \quad \text{pour } a > 0, \quad 0 < z < 1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z) < \frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite ($p > 1$),

$$|R_{2n}| < \frac{(p-1)p(p+1)\dots(p+2n-1)}{a^{p+2n}} |C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a = 100, \quad m = 49, \quad p = 5, \quad n = 2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{(101+2k)^4} - \frac{1}{(102+2k)^4} \right) = \\ &= \frac{15}{2^5 \cdot 10^8} - \frac{3}{2^5 \cdot 10^9} + \frac{5.127}{2^8 \cdot 10^{14}} + R_4, \end{aligned}$$

où

$$|R_4| < \frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5 \cdot 10^8} = 0,0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8 \cdot 10^{14}} = 0,0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5 \cdot 10^9} = 0,000000000093750,$$

d'où

$$S = 0,0000000045937748,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100, \quad p = 5, \quad n = 3,$$

on trouve

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{2 \cdot 10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2.5}{10^{15}} - \frac{14}{10^{18}} = \\ &= 0,0000000051000264000, \end{aligned}$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1, \quad f(x) = \frac{d}{dx} \log u(x),$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)\lambda} (x+3)^{(x+3)\lambda} \dots (x+2m+1)^{(x+2m+1)\lambda}}{x^{2\lambda} (x+2)^{(x+2)\lambda} \dots (x+2m)^{(x+2m)\lambda}},$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k} \log u(a+1) u(a).$$

Or,

$$\log u(a+1) u(a) = \log \frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]\lambda}}{a^{a\lambda}} = \xi_1 - \xi_0,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]\lambda \log [a+2(m+1)],$$

$$\xi_0 = a\lambda \log a.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \xi_1^{(k)} - \xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s,$$

une suite des polynomes en λ , définis par les relations suivantes

$$\mu_0 = 1,$$

$$\mu_1 = \lambda + (\lambda - 1)\mu_0,$$

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2)\mu_1,$$

$$\mu_3 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + (\lambda - 3)\mu_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_s = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - s + 1) + (\lambda - s)\mu_{s-1}.$$

On trouve, pour $k \leq \lambda$,

$$\begin{aligned} \xi_1^{(k)} = & \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1)[a + 2(m + 1)]^{\lambda - k} \log[a + 2(m + 1)] + \\ & + \mu_{k-1}[a + 2(m + 1)]^{\lambda - k}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\xi_0^{(k)} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1)a^{\lambda - k} \log a + \mu_{k-1}a^{\lambda - k}, \quad (30_1)$$

d'où

$$\xi_1^{(i)} = \lambda! \log[a + 2(m + 1)] + \mu_{\lambda-1},$$

$$\xi_0^{(i)} = \lambda! \log a + \mu_{\lambda-1}.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(i+s)} = (-1)^{s-1}(s-1)!\lambda! \frac{1}{[a + 2(m + 1)]^s}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \xi_0^{(i+s)} = & (-1)^{s-1}(s-1)!\lambda! \frac{1}{a^s}. \\ & (s=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (32)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1} \frac{d}{dx} \log u(x) dx = \log \frac{u(a+1)}{u(a)} = 2 \log v_\lambda(a, m) + \xi_1 - \xi_0,$$

où l'on a posé

$$v_{\lambda}(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{a^{\lambda}} (a+2)^{(a+2)^{\lambda}} \dots (a+2m)^{(a+2m)^{\lambda}}}{(a+1)^{(a+1)^{\lambda}} (a+3)^{(a+3)^{\lambda}} \dots (a+2m+1)^{(a+2m+1)^{\lambda}}}. \quad (33)$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2 \log v_{\lambda}(a, m) = -(\xi_1 - \xi_0) - C_1(\xi'_1 - \xi'_0) -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \dots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \dots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$\varrho_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \quad (34)$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}[a+2(m+1)] =$$

$$= -2s! \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \quad (35)$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1 \xi'_0 + C_3 \xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1} \xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \dots + C_{\lambda+2s-1} \xi_0^{(\lambda+2s-1)} + \varrho_s^{(\lambda)}(a). \quad (36)$$

On aura

$$R_s = \varrho_s^{(\lambda)}(a) - \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)]$$

et

$$\begin{aligned} 2 \log v_\lambda(a, m) &= Q_s(a) - \xi_1 - C_1 \xi'_1 - C_3 \xi_1^{(3)} - \\ &- \dots - C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \\ &- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)], \end{aligned} \quad (37)$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s + 1$,

$$\begin{aligned} 2 \log v_{\lambda}(a, m) &= Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1 \xi'_1 - C_3 \xi_1^{(3)} - \\ &- \dots - C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \\ &- C_{\lambda+2s+1} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)]. \end{aligned}$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$\begin{aligned} Q_{s+1}(a) &= Q_s(a) + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] - \\ &- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] + C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s+1)}, \end{aligned}$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m .

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] = \lim_{m=\infty} \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m + 1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s , mais elle dépend, évidemment, de λ et de a , ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30₁) donnent

$$\begin{aligned} &\xi_0 + C_1 \xi'_0 + C_3 \xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} = \\ &= [a^\lambda + C_1 \lambda a^{\lambda-1} + C_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) a^{\lambda-3} + \dots + C_{\lambda-1} \lambda! a] \log a + p_\lambda(a), \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$p_{\lambda}(a) = C_1 \mu_0 a^{\lambda-1} + C_3 \mu_2 a^{\lambda-3} + \dots + C_{\lambda-1} \mu_{\lambda-2} a. \quad (38)$$

Or,

$$a^{\lambda} + C_1 \lambda a^{\lambda-1} + C_3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) a^{\lambda-3} + \dots + C_{\lambda-1} \lambda! a = \lambda! \psi_{\lambda}(a).$$

On a donc

$$\xi_0 + C_1 \xi'_0 + C_3 \xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} = \lambda! \psi_{\lambda}(a) \log a + p_{\lambda}(a).$$

D'autre part, en vertu de (32),

$$\begin{aligned} & C_{\lambda+1} \xi_0^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_0^{(\lambda+3)} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \xi_0^{(\lambda+2s-1)} = \\ & = \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3} 2! \frac{1}{a^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} \right]. \end{aligned}$$

On trouve donc, en tenant compte de (36),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda!} q_{\lambda}(a) = \psi_{\lambda}(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_1(a) + \\ & C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3} 2! \frac{1}{a^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} + \frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a). \quad (39) \end{aligned}$$

26. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right)$$

étant convergente pour toutes les valeurs positives de a , on trouve l'ex-

pression de $\frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a)$ sous la forme de la série aussi convergente:

$$\frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a) = u_{\lambda,s}^{(0)}(a) + u_{\lambda,s}^{(1)}(a) + \dots + u_{\lambda,s}^{(k)}(a) + \dots,$$

où l'on a posé [voir l'égalité (34)],

$$\begin{aligned} & u_{\lambda,s}^{(k)}(a) = \\ & = -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz. \end{aligned}$$

Si l'on pose $s = 0$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda!} q_{\lambda}(a) &= \psi_{\lambda}(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_{\lambda}(a) + \\ &+ u_{\lambda}^{(0)}(a) + u_{\lambda}^{(1)}(a) + \dots + u_{\lambda}^{(k)}(a) + \dots, \end{aligned} \quad (40)$$

où

$$u_{\lambda}^{(k)}(a) = - \int_0^1 \psi_{\lambda}(z) \left(\frac{1}{a+z+2k} - \frac{1}{a+z+2k+1} \right) dz.$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

Il est aisé d'évaluer chacune de ces quadratures, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

La formule (40) est analogue à celle de Goudermann dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$ et définit une fonction $q_{\lambda}(a)$, continue pour toutes les valeurs positives de la variable a .

On pourrait, moyennant la formule (40), étendre la notion de la fonction $q_{\lambda}(a)$ aux valeurs complexes de a , mais je me bornerai, dans ce qui va suivre, au cas de a réel et positif.

27. La formule (39) correspond à la série de Stirling et fournit un moyen simple de calcul numérique de la fonction $q_{\lambda}(a)$ pour les valeurs de a plus grandes que l'unité.

Écrivons (39) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} q_{\lambda}(x) &= A_{\lambda}(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + \\ &+ C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} + \varrho_s^{(\lambda)}(x) = \\ &= A_{\lambda}(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} + \\ &+ C_{\lambda+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{x^{2s+1}} + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_{\lambda}(x) &= \lambda! \psi_{\lambda}(x) \log x + p_{\lambda}(x), \\ \varrho_s^{(\lambda)}(x) &= \\ &= -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+1}} \right] dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) = \\ = -[2(s+1)]! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s+2}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+3}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+3}} \right] dz. \end{aligned}$$

Supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit pair.

On trouve, eu égard à (25₁) et (25₂),

$$\begin{aligned} C_{\lambda+2s-1} < 0, \quad \psi_{\lambda+2s}(z) < 0 \quad \text{pour } 0 < z < 1, \\ C_{\lambda+2s+1} > 0, \quad \psi_{\lambda+2s+2}(z) > 0 \quad \text{pour } 0 < z < 1. \end{aligned}$$

Si nous supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit impair, nous aurons

$$\begin{aligned} C_{\lambda+2s-1} > 0, \quad \psi_{\lambda+2s}(z) > 0, \\ C_{\lambda+2s+1} < 0, \quad \psi_{\lambda+2s+2}(z) < 0 \end{aligned} \quad \text{pour } 0 < z < 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} C_{\lambda+2s-1} < 0, \quad \varrho_s^{(\lambda)}(x) > 0, \\ C_{\lambda+2s+1} > 0, \quad \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) < 0, \\ C_{\lambda+2s+1} > 0, \quad \varrho_s^{(\lambda)}(x) < 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est pair,} \\ & \\ &\text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est impair.} \end{aligned}$$

et

$$C_{\lambda+2s+1} < 0, \quad \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) > 0,$$

On trouve donc, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} q_{\lambda}(x) &> A_{\lambda}(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}}, \\ q_{\lambda}(x) &< A_{\lambda}(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + \\ &+ C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{x^{2s+1}}. \end{aligned}$$

et

$$q_k(x) < A_k(x) + C_{k+1} \frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{k+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}},$$

$$q_k(x) > A_k(x) + C_{k+1} \frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{k+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} + C_{k+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{x^{2s+1}},$$

dans le second cas.

Il en résulte l'égalité suivante

$$q_k(x) = A_k(x) + C_{k+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{k+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + C_{k+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} + \Theta C_{k+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{x^{2s+1}}, \quad (39_1)$$

ayant lieu toujours, quels que soient les nombres λ et s .

On peut donc poser approximativement

$$q_k(x) = \lambda! \psi_k(x) \log x + p_k(x) + C_{k+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{k+3} \frac{2! \lambda!}{x^3} + \dots + \Theta C_{k+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{x^{2s-1}} \quad (39_2)$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\epsilon_k^{(1)} = \left| C_{k+2s+1} \right| \frac{2s! \lambda!}{x^{2s+1}}.$$

Si l'on pose, pour exemple,

$$x = 10, \quad \lambda = 2, \quad s = 5,$$

on aura

$$q_2(10) = 2\psi_2(10) \log 10 + p_2(10) + 2C_3 \frac{1}{10} + 2C_5 \frac{2!}{10^3} + 2C_7 \frac{4!}{10^5} + 2C_9 \frac{6!}{10^7} + 2C_{11} \frac{8!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\epsilon_2^{(2)} = \left| C_{13} \right| \frac{10! 2}{10^{11}} < 0,000000000032.$$

¹⁾ Θ est un nombre positif plus petit que l'unité.

Disposant le calcul dans les tableaux suivants:

$$2\psi_2(10)\log 10 = 207,23265\ 83694\ 636\dots,$$

$$2C_8 \frac{1}{10} = 0,00833\ 33333\ 333\dots,$$

$$2C_7 \frac{4!}{10^5} = 0,00000\ 02023\ 809\dots,$$

$$2C_{11} \frac{8!}{10^9} = 0,00000\ 00003\ 489\dots,$$

$$207,24099\ 19055\ 267\dots$$

$$p_2(10) = -5$$

$$2C_5 \frac{2!}{10^3} = -0,00001\ 66666\ 666\dots,$$

$$2C_9 \frac{6!}{10^7} = -0,00000\ 00061\ 507\dots,$$

$$-5,00001\ 66728\ 174\dots$$

on trouve

$$q_2(10) = 202,24097\ 52327\dots,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

28. Nous trouverons encore les valeurs approchées de

$$q_4(10), \quad q_6(10)$$

qui nous seront nécessaires plus loin.

La formule (39₂) donne

$$\begin{aligned} q_4(10) = & 4! \psi_4(10) \log 10 + p_4(10) + \\ & + C_5 \frac{4!}{10} + C_7 \frac{2! 4!}{10^3} + C_9 \frac{4! 4!}{10^5} + C_{11} \frac{6! 4!}{10^7} + C_{13} \frac{8! 4!}{10^9} \end{aligned}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(4)} = |C_{15}| \frac{10! 4!}{10^{11}} < 0,000000000039.$$

On trouve, en vertu de (19), (38), (28) et (28₁),

$$4! \psi_4(z) = z^4 - 2z^3 + z, \quad p_4(z) = -\frac{z^3}{2} + \frac{26}{4!}z,$$

car, dans le cas considéré (n° 23),

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2)(2\lambda - 1) = 26.$$

On a donc

$$4! \psi_4(10) \log 10 = 18443,70659 \ 48823 \ 0592\dots,$$

$$p_4(10) = -489,16666 \ 66666 \ 6666\dots$$

D'autre part,

$$C_7 \frac{2!4!}{10^3} = 0,00002 \ 02380 \ 9523\dots,$$

$$C_{11} \frac{6!4!}{10^7} = 0,00000 \ 00074 \ 7835\dots,$$

$$+ 0,00002 \ 02455 \ 7358\dots$$

$$C_5 \frac{4!}{10} = -0,01$$

$$C_9 \frac{4!4!}{10^5} = -0,00000 \ 02460 \ 3174\dots,$$

$$C_{13} \frac{4!8!}{10^9} = -0,00000 \ 00004 \ 2432\dots,$$

$$- 0,01000 \ 02464 \ 5606\dots$$

Par conséquent,

$$q_4(10) = 17954, \ 52994 \ 82147 \ 5678\dots,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

29. Appliquons enfin l'égalité (39₁) au cas de

$$\lambda = 6, \quad s = 3, \quad x = 10.$$

On trouve

$$q_6(10) = 6! \psi_6(10) \log 10 + p_6(10) + C_7 \frac{6!}{10} + C_9 \frac{2! 6!}{10^3} + C_{11} \frac{4! 6!}{10^5}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(6)} = |C_{13}| \frac{6! 6!}{10^7} < 0,000000023.$$

On a

$$6! \psi_6(z) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x,$$

$$p_6(z) = C_1 \mu_0 z^5 + C_3 \mu_2 z^3 + C_5 \mu_4 z,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 74, \quad \mu_4 = 1044.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 6! \psi_6(10) \log 10 &= 10^6 - 3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10 = \\ &= 1623253,41300 \ 8012 \dots, \\ p_6(10) &= -5 \cdot 10^4 + \frac{37 \cdot 10^3}{12} - \frac{87}{2} = \\ &= -46960,16666 \ 6666 \dots \end{aligned}$$

D'autre part,

$$C_7 \frac{6!}{10} = 0,03035 \ 7142 \dots,$$

$$C_9 \frac{2! 6!}{10^3} = -0,00006 \ 1507 \dots,$$

$$C_{11} \frac{4! 6!}{10^5} = 0,00000 \ 0747 \dots$$

On trouve donc

$$q_6(10) = 1576293,27663 \ 7728 \dots,$$

le résultat avec 7 décimales exact.

30. Revenons maintenant à la formule (37).

On trouve, en vertu de (30) et (31),

$$\begin{aligned} & \xi_1 + C_1 \xi_1^1 + C_3 \xi_1^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} = \\ & = \lambda! \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] + p_\lambda [a + 2(m+1)], \\ & C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_1^{(\lambda+3)} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} = \\ & = \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a+2(m+1)} + C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} \right]. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\lambda!} \log v_\lambda(a, m) = \\ & = \frac{1}{\lambda!} q_\lambda(a) - \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] - \\ & - \frac{1}{\lambda!} p_\lambda [a + 2(m+1)] - C_{\lambda+1} \frac{1}{a+2(m+1)} - \\ & - C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} - \\ & - \frac{1}{\lambda!} \rho_s^{(\lambda)} [a + 2(m+1)]; \end{aligned} \quad (41)$$

Cette formule permet de calculer le logarithme du rapport

$$v_\lambda(a, m) = \frac{a^{a\lambda} (a+2)^{(a+2)\lambda} \dots (a+2m)^{(a+2m)\lambda}}{(a+1)^{(a+1)\lambda} (a+3)^{(a+3)\lambda} \dots (a+2m+1)^{(a+2m+1)\lambda}},$$

pour les valeurs données de λ et de a , avec une approximation qui sera d'autant plus grande que m sera plus considérable.

31. Considérons le cas particulier de $a = 2$.

Transformons d'abord l'expression de $v_\lambda(2, m)$.

On trouve

$$\begin{aligned} & 2^{2\lambda} 4^{4\lambda} \dots [2(m+1)]^{2\lambda(m+1)\lambda} = \\ & = [2^{1+2\lambda+3\lambda+\dots+(m+1)\lambda} 1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (m+1)^{(m+1)\lambda}]^{2\lambda} = \\ & = [2^{\lambda!} \varphi_{\lambda+1}(m+2) 1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (m+1)^{(m+1)\lambda}]^{2\lambda} \end{aligned}$$

et

$$v_{\lambda}(2, m) = \frac{2^{2\lambda+1} \lambda! \varphi_{\lambda+1}(m+2) [1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (m+1)^{(m+1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (2m+3)^{(2m+3)\lambda}}.$$

d'où l'on tire, en remplaçant $m+2$ par x ,

$$v_{\lambda}(2, x-2) = \frac{2^{2\lambda+1} \lambda! \varphi_{\lambda+1}(x) [1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (x-1)^{(x-1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (2x-1)^{(2x-1)\lambda}},$$

où il faut poser

$$\varphi_1(x) = x-1, \quad 0! = 1,$$

afin que la formule soit vraie pour $\lambda=0$.

Nous obtenons ainsi une suite de fonctions $v_{\lambda}(\lambda=0, 2, 4, \dots)$, intimement liées avec les fonctions, auxquelles M. Beaupain ¹⁾ a donné le nom des fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin.

Ces fonctions se trouvent aussi en relations simples avec les fonctions, étudiées par M. Alexéievsky dans sa Thèse: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$ “ ²⁾.

La fonction

$$1^{1\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (x-1)^{(x-1)\lambda}$$

représente une généralisation naturelle de la fonction

$$\Gamma'(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1)$$

pour x entier.

Nous poserons

$$\Gamma'_{\lambda}(x) = 1^{1\lambda} \cdot 1^{2\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \dots (x-1)^{(x-1)\lambda}.$$

¹⁾ S. Beaupain: „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin“. Mémoires, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique. 1902.

Compar. aussi Glaisher: „Products and series involving prime numbers only“. The Quarterly Journal, 1895 et 1896. (La plupart des Mémoires de M. Glaisher ne faisant partie de Bibliothèque de l'Université de Kharkow, je ne puis les citer que suivant l'analyse, faite par M. Beaupain dans l'Avant-propos à son Mémoire. Voir aussi „Bulletin des Sciences mathématiques“, 1899).

²⁾ W. Alexéievsky: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma'(x)$ “. Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 2^e série, T. I, 1889.

Compar. aussi Barnes: „The Theory of the G Function“. Quarterly Journal of Mathematics, T. XXXI.

Idem: „The Theory of the Double Gamma Function“. Philosophical Transactions of the R. S. L. Series A, Vol. 196, 1901.

On en voit que

$$\Gamma(x) = \Gamma_0(x).$$

Cela posé, on peut écrire

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2^{\lambda+1}\lambda! \varphi_{\lambda+1}(x)} [\Gamma_\lambda(x)]^{2\lambda+1}}{\Gamma_\lambda(2x)}. \quad (A)$$

Posant $\lambda = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} v_0(2, x-2) &= \frac{2^{2(x-1)} [\Gamma_0(x)]^2}{\Gamma_0(2x)} = \\ &= 2^{2(x-1)} B(x, x) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}, \end{aligned}$$

B désignant l'intégrale eulérienne de première espèce.

On voit que la fonction $v_\lambda(2, x-2)$ représente une généralisation de la fonction $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$.

Je désignerai $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$ simplement par $\beta_0(x)$ et, par analogie, $v_\lambda(2, x-2)$ par $\beta_\lambda(x)$.

32. Remplaçons maintenant dans le second membre de l'équation (41) a par 2, $m+2$ par x .

Il viendra

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda!} \log \beta_\lambda(x) &= \frac{1}{\lambda!} q_\lambda(2) - \psi_\lambda(2x) \log 2x - \frac{1}{\lambda!} p_\lambda(2x) - \\ &- \frac{C_{\lambda+1}}{2} \frac{1}{x} - \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} \frac{2!}{x^3} - \dots - \frac{C_{\lambda+2s-1}}{2^{2s-1}} \frac{[2(s-1)]!}{x^{2s-1}} - \\ &- \frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(2x). \end{aligned} \quad (42)$$

On peut écrire aussi, en tenant compte de (39),

$$2 \log \beta_\lambda(x) = q_\lambda(2) - q_\lambda(2x). \quad (43)$$

Nous avons supposé jusqu'à présent que x soit un entier; mais la série (40) définit la fonction $q_\lambda(a)$ pour toutes les valeurs de a , fractionnaires ou incommensurables.

L'équation (43) permet donc d'étendre la notion de la fonction $\beta_\lambda(x)$ à toutes les valeurs réelles et positives de x , ou même aux valeurs complexes de x , mais je me bornerai, comme dans le n° 26, au cas de x réel et positif.

On voit de ce qui précède que la formule (27) permet de construire les points principaux de la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$)¹⁾, analogues à la fonction primitive $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \beta_0(x)$.

Remarquons que la théorie de ces fonctions peut être déduite de celle de fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, comme le montre la relation (A), mais nous préférons à dessein une méthode directe et plus simple, en désirant attirer l'attention aux applications directes de la formule (27), des polynômes $\psi_n(z)$ et des nombres C_n .

Quant aux fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, ces propriétés fondamentales résulteront presque immédiatement de nos recherches sur la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$, comme nous le démontrerons à la fin de ce travail.

33. La formule (42), ayant lieu quel que soit le nombre x , fournit un moyen commode de calcul approché de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x assez grand.

La constante $q_\lambda(2)$, qui figure dans la formule (42), jouit par rapport à la fonction $\log \beta_\lambda(x)$ la même rôle que $\log 2\pi$ relativement à $\log \Gamma(x)$, ou, plus généralement, que les constantes $\log \tilde{\omega}_{2i}$, introduites par M. Beupain, par rapport aux transcendentes de Kinkelin.

Le calcul numérique de $\log \beta_\lambda(x)$ exige tout-d'abord le calcul des constantes $q_\lambda(2)$ ($\lambda = 2, 4, \dots$) avec une approximation suffisante.

On pourrait, pour cela, employer la formule (39₁) en y posant $x=2$, mais cette manière du calcul n'est pas assez exacte.

L'égalité (43) fournit un moyen plus commode.

Le calcul de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x un entier ne surpassant pas, par exemple, 5 ne présente pas des grandes difficultés; il en est de même du calcul de $q_\lambda(2x)$ pour $x \geq 5$, comme nous l'avons déjà vu aux n°s 27—30.

Sachant les valeurs de $\log \beta_\lambda(x)$ et $q_\lambda(2x)$, ainsi calculées, nous obtiendrons

$$q_\lambda(2) = 2 \log \beta_\lambda(x) + q_\lambda(2x). \quad (44)$$

Posons, par exemple,

$$x = 5, \quad \lambda = 2.$$

¹⁾ Nous avons supposé jusqu'à présent que λ soit pair, mais cette restriction n'a rien d'essentiel.

On a

$$\beta_2(5) = \frac{2^{2^2} \cdot 4^{4^2} \cdot 6^{6^2} \cdot 8^{8^2}}{3^{3^2} \cdot 5^{5^2} \cdot 7^{7^2} \cdot 9^{9^2}},$$

d'où

$$\log \beta_2(5) = 264 \log 2 - 135 \log 3 - 25 \log 5 - 49 \log 7.$$

Or,

$$264 \log 2 = 182,99085 \ 56678 \ 25\dots,$$

$$135 \log 3 = 148,31265 \ 89701 \ 94\dots,$$

$$25 \log 5 = 40,23594 \ 78108 \ 52\dots,$$

$$49 \log 7 = 95,34959 \ 73037 \ 10\dots$$

Par conséquent,

$$2 \log \beta_2(5) = -201,81469 \ 68338 \ 64\dots$$

D'autre part (n° 27),

$$q_2(10) = 202,24097 \ 52327\dots$$

On trouve donc, eu égard à (44),

$$q_2(2) = 0,42627 \ 83988\dots, \quad (45)$$

le résultat avec 10 décimales exact.

34. Posons encore

$$\lambda = 4, \quad x = 5.$$

On trouve

$$\log \beta_4(5) = 1412 \log 2 - 11907 \log 3 - 625 \log 5 - 2401 \log 7,$$

$$14112 \log 2 = 9781,69301 \ 20619 \ 4820\dots,$$

$$11907 \log 3 = 13081,17652 \ 11711 \ 8199\dots,$$

$$625 \log 5 = 1005,89869 \ 52713 \ 1273\dots,$$

$$2401 \log 7 = 4672,13026 \ 78818 \ 0724\dots,$$

d'où

$$2 \log \beta_4(5) = -17955,02494 \ 45247 \ 0753\dots$$

D'autre part (voir n° 28),

$$q_4(10) = 17954,52994 \ 82147 \ 5678 \dots$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0,49499 \ 63099 \ 50 \dots, \quad (46)$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344 \log 2 - 1016955 \log 3 - 25.5^4 \log 5 - 49.7^4 \log 7,$$

$$841344 \log 2 = 583175,22148 \ 1026 \dots,$$

$$1016 \ 955 \log 3 = 1117239,26001 \ 2377 \dots,$$

$$25.5^4 \log 5 = 25147,46738 \ 1782 \dots,$$

$$49.7^4 \log 7 = 228934,38312 \ 6208 \dots,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291,77807 \ 8684 \dots$$

D'autre part (voir n° 29),

$$q_6(10) = 1576293,27663 \ 7728 \dots$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1,49855 \ 9044 \dots, \quad (47)$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1} q_6(2),$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0.01179 \ 9677 \dots, \quad (48)$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1} q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ , ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39),

$$\begin{aligned} \log \omega_\lambda = & \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \psi_\lambda(2) \log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1} p_\lambda(2) + \\ & + \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \end{aligned} \quad (49)$$

avec une erreur moindre que

$$\epsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \quad (50)$$

En se rappelant que les polynomes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2 \frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z=1$,

$$\lambda! \psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ pair.}$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\begin{aligned} \log \omega_\lambda = & \frac{2 \log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} + \\ & + \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \end{aligned} \quad (51)$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2, 4, 6, 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\epsilon_3^{(2)} < 0,000067 \dots, \quad \epsilon_3^{(4)} < 0,000018 \dots,$$

$$\epsilon_3^{(6)} < 0,000014 \dots, \quad \epsilon_3^{(8)} < 0,000009 \dots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$.

On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2 \log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511 \cdot 4 \cdot 5!} + \frac{2 \cdot 8! \cdot 2073}{511 \cdot 2^3 \cdot 12!} - \frac{4! 8! 5461}{511 \cdot 2^6 \cdot 13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1 \mu_0 x^7 + C_3 \mu_2 x^5 + C_5 \mu_4 x^3 + C_7 \mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_8(2) &= -64 + 194,6666666 \dots - 198,1333333 + 58,4071428 = \\ &= -9,0595238 \dots \end{aligned}$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0,0177290 \dots$$

D'autre part,

$$\frac{2 \log 2}{511} = 0,0027129 \dots,$$

$$\frac{8!}{511 \cdot 4 \cdot 5!} = 0,1643835 \dots,$$

$$\frac{2 \cdot 8! \cdot 2073}{511 \cdot 2^3 \cdot 12!} = 0,0000853 \dots,$$

$$\frac{4! 8! 5462}{511 \cdot 2^6 \cdot 13!} = 0,0000259 \dots$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0,1793 \dots,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \quad (\lambda = 0, 2, 4, \dots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1) \log \omega_\lambda.$$

La formule (42) donne

$$\begin{aligned} & 2 \log \beta_\lambda(x) + \lambda! \psi_\lambda(2x) \log 2x + p_\lambda(2x) = \\ & = \log \pi_\lambda - C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}} - \rho_s^{(\lambda)}(2x), \end{aligned}$$

d'où

$$\pi_\lambda = \beta_\lambda^2(x) e^{p_\lambda(x)} (2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)} e^{C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}}} e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x .

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \beta_\lambda^{(2)}(x) e^{p_\lambda(2x)} (2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)} e^{C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}}} = 1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 4^{4\lambda} \cdot 4^{4\lambda} \dots (2x-2)^{(2x-2)\lambda} (2x-2)^{(2x-2)\lambda}}{1^{1\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \cdot 5^{5\lambda} \dots (2x-3)^{(2x-3)\lambda} (2x-1)^{(2x-1)\lambda}} \cdot \frac{(2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)}}{(2x-1)^{(2x-1)\lambda}} e^{p_\lambda(2x)}, \quad (52)$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda = 0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x) = 1, \quad p_\lambda(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \quad \text{pour } \lambda = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2x-2) (2x-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2x-3) (2x-1)} \cdot \frac{2x}{2x-1}. \quad (53)$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0, \pi_2, \pi_4, \dots, \pi_k, \dots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)$ ($\lambda = 0, 2, 4, \dots$).

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0,55158 \ 27052 \dots ,$$

$$\log \pi_2 = 0,42627 \ 83988 \dots ,$$

$$\log \pi_4 = -0,49499 \ 63099 \dots ,$$

$$\log \pi_6 = 1,49855 \ 90 \dots ,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \quad (\lambda = 0, 2, 4, \dots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x)$ ($\lambda = 0, 2, 4, \dots$) pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2, \quad x = 100.$$

On a

$$2 \log \beta_2(100) = 2 \log \frac{2^{2^2} \cdot 4^{4^2} \cdot 6^{6^2} \dots 193^{194^2} \cdot 196^{196^2}}{3^{3^3} \cdot 5^{5^3} \cdot 7^{7^3} \dots 195^{195^3} \cdot 197^{197^3}} = q_2(2) - q_2(200),$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2 \log \beta_2(100) = 0,4262783988 \dots - 2p_2(200) \log 200 -$$

$$- p_2(200) - C_3 \frac{2!}{200} - C_5 \frac{2! \ 2!}{200^3} \dots$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2p_2(200) \log 200 = 200.199 \log 2 + 400.199 \log 10,$$

$$p_2(200) = -100.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199 \log 2 = 27587,25778 \ 628612 \dots ,$$

$$400.199 \log 10 = 183285,77340 \ 232602 \dots ,$$

$$p_2(200) = -100,$$

$$C_3 \frac{2!}{200} = 0,00004 \ 166666 \dots ,$$

$$C_5 \frac{2! \ 2!}{200^3} = 0,00000 \ 000208 \dots$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386,30247 \ 5938 \dots ,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6} \cdot 4^{4^6} \dots 16^{16^6} \cdot 18^{18^6}}{3^{3^6} \cdot 5^{5^6} \dots 17^{17^6} \cdot 19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$\begin{aligned} 2 \log \beta_6(10) &= 1,4985590 \dots - 6! \psi_6(20) \log 20 - \\ &- p_6(20) - C_7 \frac{6!}{20} - C_9 \frac{2! 6!}{20^3} - C_{11} \frac{4! 6!}{20^5} - \dots \end{aligned}$$

Or,

$$6! \psi_6(20) \log 20 = 163087647,89788 \ 5633 \dots ,$$

$$p_6(10) = -1575420, \ 33333 \ 3333 \dots ,$$

$$C_7 \frac{6!}{20} = 0,01517 \ 8571 \dots ,$$

$$C_9 \frac{2! 6!}{20^3} = -0,00000 \ 7688 \dots ,$$

$$C_{11} \frac{4! 6!}{20^5} = 0,00000 \ 0023 \dots .$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113,04033 \ 86 \dots ,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39₁) et (42) donnent

$$\begin{aligned} 2 \log \beta_\lambda(x) &= \log \pi_\lambda - \lambda! \psi_\lambda(2x) \log 2x - p_\lambda(2x) - \\ &- C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{(2x)^3} - \dots - \theta C_{\lambda+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log \beta_{\lambda}(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\begin{aligned} \log \beta_{\lambda}(x) = & \frac{1}{2} \log \pi_{\lambda} - \frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x) \log 2x - \\ & - \frac{1}{2} p_{\lambda}(2x) - C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x} - \Theta \frac{\lambda!}{8x^3} C_{\lambda+3}, \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)} e^{-C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x} - \Theta C_{\lambda+3} \frac{\lambda!}{8x^3}}. \quad (55)$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)} e^{-C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda = 0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log \pi_0 = \log \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z) = 1, \quad p_0(z) = 0, \quad 0! = 1,$$

$$2\beta_0(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{V y} = B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\begin{aligned} \log B_0(x) = & \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log 2x - \\ & - \frac{C_1}{2} \frac{1}{2x} - \frac{C_3}{2} \frac{2!}{(2x)^3} - \dots - \Theta \frac{C_{2s+1}}{2} \frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \end{aligned} \quad (56)$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_k(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4 \cdot 21} - \frac{2!}{2 \cdot 4! 21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4! |C_5|}{2 \cdot 21^5} < 0,0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2} \log 2\pi = 0,91893 \ 853 \dots,$$

$$\frac{1}{2} \log 21 = 1,52226 \ 121 \dots,$$

$$\frac{1}{4 \cdot 21} = 0,01190 \ 476 \dots,$$

$$\frac{2!}{2 \cdot 4! 21^3} = 0,00000 \ 449 \dots$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0,59142 \ 24 \dots, \quad (57)$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \quad (58)$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)} \frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}, \quad (59)$$

et

$$\log \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}. \quad (60)$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n° précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39₂),

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2 \cdot 21^2} - \frac{3!}{4! 21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0,04761\ 904\dots,$$

$$\frac{1}{2 \cdot 21^2} = 0,00113\ 378\dots,$$

$$\frac{3!}{4! \cdot 21^4} = 0,00000\ 128\dots,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = 0,0487515\dots$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = -3,02102\dots, \quad (61)$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -3,61244\dots$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad (k=3,4,5,\dots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k=0$ et $k=1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda=0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{\frac{1}{8x} - \frac{\theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{\frac{1}{8x}} \quad (62)$$

D'autre part (voir n° 28),

$$q_4(10) = 17954,52994 \ 82147 \ 5678 \dots$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0,49499 \ 63099 \ 50 \dots, \quad (46)$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344 \log 2 - 1016955 \log 3 - 25.5^4 \log 5 - 49.7^4 \log 7,$$

$$841344 \log 2 = 583175,22148 \ 1026 \dots,$$

$$1016 \ 955 \log 3 = 1117239,26001 \ 2377 \dots,$$

$$25.5^4 \log 5 = 25147,46738 \ 1782 \dots,$$

$$49.7^4 \log 7 = 228934,38312 \ 6208 \dots,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291,77807 \ 8684 \dots$$

D'autre part (voir n° 29),

$$q_6(10) = 1576293,27663 \ 7728 \dots$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1,49855 \ 9044 \dots, \quad (47)$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1} q_6(2),$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0,01179 \ 9677 \dots, \quad (48)$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1} q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ , ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39₁),

$$\begin{aligned} \log \omega_\lambda = & \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \psi_\lambda(2) \log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1} p_\lambda(2) + \\ & + \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \end{aligned} \quad (49)$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \quad (50)$$

En se rappelant que les polynômes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2 \frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z=1$,

$$\lambda! \psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ pair.}$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\begin{aligned} \log \omega_\lambda = & \frac{2 \log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} + \\ & + \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4! \lambda!}{2^{\lambda+1}-1} \frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \end{aligned} \quad (51)$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2, 4, 6, 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\varepsilon_3^{(2)} < 0,000067 \dots, \quad \varepsilon_3^{(4)} < 0,000018 \dots,$$

$$\varepsilon_3^{(6)} < 0,000014 \dots, \quad \varepsilon_3^{(8)} < 0,000009 \dots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$.

On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2 \log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511 \cdot 4 \cdot 5!} + \frac{2 \cdot 8! \cdot 2073}{511 \cdot 2^8 \cdot 12!} - \frac{4! \cdot 8! \cdot 5461}{511 \cdot 2^6 \cdot 13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1 \mu_0 x^7 + C_3 \mu_2 x^5 + C_5 \mu_4 x^3 + C_7 \mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_8(2) &= -64 + 194,6666666 \dots - 198,1333333 + 58,4071428 = \\ &= -9,0595238 \dots \end{aligned}$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0,0177290 \dots$$

D'autre part,

$$\frac{2 \log 2}{511} = 0,0027129 \dots,$$

$$\frac{8!}{511 \cdot 4 \cdot 5!} = 0,1643835 \dots,$$

$$\frac{2 \cdot 8! \cdot 2073}{511 \cdot 2^8 \cdot 12!} = 0,0000853 \dots,$$

$$\frac{4! \cdot 8! \cdot 5461}{511 \cdot 2^6 \cdot 13!} = 0,0000259 \dots$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0,1793 \dots,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \quad (\lambda = 0, 2, 4, \dots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1) \log \omega_\lambda.$$

La formule (42) donne

$$\begin{aligned} & 2 \log \beta_\lambda(x) + \lambda! \psi_\lambda(2x) \log 2x + p_\lambda(2x) = \\ & = \log \pi_\lambda - C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} - \dots - C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}} - \rho_s^{(\lambda)}(2x), \end{aligned}$$

d'où

$$\pi_\lambda = \beta_\lambda^2(x) e^{p_\lambda(x)} (2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)} e^{C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}}} e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x .

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \beta_\lambda^{(2)}(x) e^{p_\lambda(2x)} (2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)} e^{C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} + \dots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]! \lambda!}{(2x)^{2s-1}}} = 1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2\lambda} \cdot 2^{2\lambda} \cdot 4^{4\lambda} \cdot 4^{4\lambda} \dots (2x-2)^{(2x-2)\lambda} (2x-2)^{(2x-2)\lambda} \dots (2x)^{\lambda! \psi_\lambda(2x)}}{1^{1\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \cdot 5^{5\lambda} \dots (2x-3)^{(2x-3)\lambda} (2x-1)^{(2x-1)\lambda} \dots (2x-1)^{(2x-1)\lambda}} e^{p_\lambda(2x)}, \quad (52)$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda = 0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x) = 1, \quad \mu_\lambda(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \quad \text{pour } \lambda = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2x-2)(2x-2)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2x-3)(2x-1)} \frac{2x}{2x-1}. \quad (53)$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0, \pi_2, \pi_4, \dots, \pi_k, \dots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)$ ($\lambda = 0, 2, 4, \dots$).

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0,55158 \ 27052 \dots ,$$

$$\log \pi_2 = 0,42627 \ 83988 \dots ,$$

$$\log \pi_4 = -0,49499 \ 63099 \dots ,$$

$$\log \pi_6 = 1,49855 \ 90 \dots ,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \quad (\lambda = 0, 2, 4, \dots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x)$ ($\lambda = 0, 2, 4, \dots$) pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2, \quad x = 100.$$

On a

$$2 \log \beta_2(100) = 2 \log \frac{2^{2^2} \cdot 4^{4^2} \cdot 6^{6^2} \dots 193^{194^2} \cdot 196^{196^2}}{3^{3^3} \cdot 5^{5^3} \cdot 7^{7^3} \dots 195^{195^3} \cdot 197^{197^3}} = q_2(2) - q_2(200),$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2 \log \beta_2(100) = 0,4262783988 \dots - 2\psi_2(200) \log 200 -$$

$$- p_2(200) - C_3 \frac{2!}{200} - C_5 \frac{2! \ 2!}{200^3} \dots$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2\psi_2(200) \log 200 = 200.199 \log 2 + 400.199 \log 10,$$

$$p_2(200) = -100.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199 \log 2 = 27587,25778 \ 628612 \dots ,$$

$$400.199 \log 10 = 183285,77340 \ 232602 \dots ,$$

$$p_2(200) = -100,$$

$$C_3 \frac{2!}{200} = 0,00004 \ 166666 \dots ,$$

$$C_5 \frac{2! \ 2!}{200^3} = -0,00000 \ 000208 \dots .$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386,30247 \ 5938 \dots ,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6} \cdot 4^{4^6} \dots 16^{16^6} \cdot 18^{18^6}}{3^{3^6} \cdot 5^{5^6} \dots 17^{17^6} \cdot 19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$\begin{aligned} 2 \log \beta_6(10) &= 1,4985590 \dots - 6! \psi_6(20) \log 20 - \\ &- p_6(20) - C_7 \frac{6!}{20} - C_9 \frac{2! 6!}{20^3} - C_{11} \frac{4! 6!}{20^5} - \dots \end{aligned}$$

Or,

$$6! \psi_6(20) \log 20 = 163087647,89788 \ 5633 \dots ,$$

$$p_6(10) = -1575420, \ 33333 \ 3333 \dots ,$$

$$C_7 \frac{6!}{20} = 0,01517 \ 8571 \dots ,$$

$$C_9 \frac{2! 6!}{20^3} = -0,00000 \ 7688 \dots ,$$

$$C_{11} \frac{4! 6!}{20^5} = 0,00000 \ 0023 \dots .$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113,04033 \ 86 \dots ,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39₁) et (42) donnent

$$\begin{aligned} 2 \log \beta_\lambda(x) &= \log \pi_\lambda - \lambda! \psi_\lambda(2x) \log 2x - p_\lambda(2x) - \\ &- C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3} \frac{2! \lambda!}{(2x)^3} - \dots - \theta C_{\lambda+2s+1} \frac{2s! \lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log \beta_{\lambda}(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\begin{aligned} \log \beta_{\lambda}(x) = & \frac{1}{2} \log \pi_{\lambda} - \frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x) \log 2x - \\ & - \frac{1}{2} p_{\lambda}(2x) - C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x} - \Theta \frac{\lambda!}{8x^3} C_{\lambda+3}, \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)} e^{-C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x} - \Theta C_{\lambda+3} \frac{\lambda!}{8x^3}}. \quad (55)$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)} e^{-C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_{\lambda}(x) = \sqrt{\pi_{\lambda}}(2x)^{-\frac{\lambda!}{2} \psi_{\lambda}(2x)} e^{-\frac{1}{2} p_{\lambda}(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda = 0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log \pi_0 = \log \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z) = 1, \quad p_0(z) = 0, \quad 0! = 1,$$

$$2\beta_0(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{V y} = B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\begin{aligned} \log B_0(x) = & \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log 2x - \\ & - \frac{C_1}{2} \frac{1}{2x} - \frac{C_3}{2} \frac{2!}{(2x)^3} - \dots - \Theta \frac{C_{2s+1}}{2} \frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \end{aligned} \quad (56)$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_\lambda(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4 \cdot 21} - \frac{2!}{2 \cdot 4! 21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4! |C_5|}{2 \cdot 21^5} < 0,0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2} \log 2\pi = 0,91893 \ 853 \dots,$$

$$\frac{1}{2} \log 21 = 1,52226 \ 121 \dots,$$

$$\frac{1}{4 \cdot 21} = 0,01190 \ 476 \dots,$$

$$\frac{2!}{2 \cdot 4! 21^3} = 0,00000 \ 449 \dots$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0,59142 \ 24 \dots, \quad (57)$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \quad (58)$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)} \frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}, \quad (59)$$

et

$$\log \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}. \quad (60)$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n° précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39₂),

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2 \cdot 21^2} - \frac{3!}{4! 21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0,04761\ 904\dots,$$

$$\frac{1}{2 \cdot 21^2} = 0,00113\ 378\dots,$$

$$\frac{3!}{4! \cdot 21^4} = 0,00000\ 128\dots,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = 0,0487515\dots$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = -3,02102\dots, \quad (61)$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -3,61244\dots$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}, \quad (k=3,4,5,\dots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k=0$ et $k=1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda=0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{\frac{1}{8x} - \frac{\theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{\frac{1}{8x}} \quad (62)$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{\frac{1}{8x}} \frac{1}{192 x^3}.$$

Si l'on pose, par exemple, $x = 50$, on aura

$$\varepsilon < 0,000000013.$$

Faisons dans (62) $x = 100$.

On trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0,10012 \ 507 \dots,$$

$$\sqrt{\pi} = 1,77245 \ 385 \dots$$

Par conséquent,

$$B_0(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0,1774670 \dots$$

avec 7 décimales exactes.

44. Considérons encore l'intégrale

$$B_1(x) = \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

On peut poser, pour x assez grand,

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2},$$

de sorte qu'on aura, en vertu de (59) et (62),

$$B_1(x) = -\frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{8x}} (4x+1)}{8x^2 \sqrt{x}}, \quad (63)$$

la formule qui peut être remplacée, pour x très grand, par la suivante

$$B_1(x) = -\frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{8x}}}{2x \sqrt{x}}. \quad (64)$$

Posons dans (63) $x = 100$. On trouve

$$B_1(100) = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{800}}}{10} \cdot \frac{401}{8 \cdot 10^4}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0,1774670 \dots,$$

$$\frac{401}{8 \cdot 10^4} = 0,0050125.$$

Par conséquent,

$$B_1(100) = 0,0008895 \dots,$$

avec 7 décimales exactes.

Moyennant la formule plus simple (64) nous obtiendrons

$$B_1(100) = 0,00088 \dots,$$

le résultat avec 5 décimales exact.

45. De l'égalité (59) nous tirerons ensuite

$$\begin{aligned} B_2(x) &= \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \\ &= B_0(x) \left[\left(\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} \right]. \end{aligned}$$

Pour les valeurs de x assez grandes nous pouvons poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} = -\frac{1}{2x^2}, \quad \left[\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right]^2 = \frac{1}{4x^2}$$

et

$$B_2(x) = \frac{3\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{8x}}}{4x^2 \sqrt{x}}. \quad (65)$$

Nous trouverons de la même manière

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log^3(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{8x}}}{4x^3 \sqrt{x}}$$

et ainsi de suite.

Posant, par exemple, $x = 100$, on trouve, eu égard à (65),

$$B_2(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0,000013 \dots,$$

le résultat avec 6 décimales exact.

46. Revenons maintenant au cas général.

Écrivons l'égalité (41) sous la forme suivante

$$2 \log v_\lambda(2x, m-1) = q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m), \quad (66)$$

en y remplaçant a par $2x$ et $m+1$ par m .

Or, en vertu de (43),

$$q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m) = 2 \log \beta_\lambda(x+m) - 2 \log \beta_\lambda(x).$$

D'autre part (n° 30),

$$\begin{aligned} v_\lambda(2x, m-1) &= \\ &= \frac{(2x)^{(2x)^\lambda} (2x+2)^{(2x+2)^\lambda} \dots (2x+2m-2)^{(2x+2m-2)^\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)^\lambda} (2x+3)^{(2x+3)^\lambda} \dots (2x+2m-1)^{(2x+2m-1)^\lambda}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \log \beta_\lambda(x) &= \log \beta_\lambda(x+m) - \\ &- \log \frac{(2x)^{(2x)^\lambda} (2x+2)^{(2x+2)^\lambda} \dots (2x+2m-2)^{(2x+2m-2)^\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)^\lambda} (2x+3)^{(2x+3)^\lambda} \dots (2x+2m-1)^{(2x+2m-1)^\lambda}}. \end{aligned}$$

Cette formule permet de calculer $\log \beta_\lambda(x)$ pour les valeurs de x plus petites que l'unité; il suffit de prendre pour m un entier ni trop petit, ni trop grand.

Si l'on pose, par exemple, $m = 4$, on trouve, eu égard à (43),

$$\begin{aligned} \log \beta_\lambda(x) &= \frac{1}{2} q_\lambda(2) - \frac{1}{2} q_\lambda(2x+8) - \\ &- \log \frac{(2x)^{(2x)^\lambda} (2x+2)^{(2x+2)^\lambda} (2x+4)^{(2x+4)^\lambda} (2x+6)^{(2x+6)^\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)^\lambda} (2x+3)^{(2x+3)^\lambda} (2x+5)^{(2x+5)^\lambda} (2x+7)^{(2x+7)^\lambda}}. \end{aligned}$$

Le calcul de dernier terme de cette égalité ne présente pas des grandes difficultés; pour le calcul approché de $q_\lambda(2x + 8)$ on peut employer la formule (39₁) dont nous avons déjà indiqué l'usage plus haut.

Sachant la valeur de la constante caractéristique $q_\lambda(2)$, nous obtenons la valeur numérique de $\log \beta_\lambda(x)$ pour $x < 1$ avec l'approximation suffisante.

Posons, pour exemple, $x = \frac{1}{2}$.

On aura

$$\begin{aligned}\log \beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} q_\lambda(2) - \frac{1}{2} q_\lambda(9) + \log \frac{2^{2\lambda} \cdot 4^{4\lambda} \cdot 6^{6\lambda} \cdot 8^{8\lambda}}{1^{1\lambda} \cdot 3^{3\lambda} \cdot 5^{5\lambda} \cdot 7^{7\lambda}} = \\ &= \frac{1}{2} q_\lambda(2) - \frac{1}{2} q_\lambda(9) + 9^\lambda \log 9 + \log \beta_\lambda(5).\end{aligned}$$

Si l'on pose $\lambda = 2$, on trouve (voir n° 33)

$$\begin{aligned}\log \beta_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} q_2(2) - \frac{1}{2} q_2(9) + 9^2 \log 9 + \log \beta_2(5) = \\ &= 0,2131391994 \dots - 100,9073484168 \dots + 162 \log 3 - \frac{1}{2} q_2(9).\end{aligned}$$

Or [l'égalité (39₂)],

$$\frac{1}{2} q_2(9) = \psi_2(9) \log 9 + \frac{1}{2} p_2(9) + C_3 \frac{1}{9} + C_5 \frac{2!}{9^3} + C_7 \frac{4!}{9^5} + C_9 \frac{6!}{9^7} + C_{11} \frac{8!}{9^9}$$

avec une erreur moindre que

$$|C_{13}| \frac{10!}{9^{11}} < 0,00000000005 \dots$$

Le calcul nous donne

$$162 \log 3 - \psi_2(9) \log 9 = 98,87510 \ 59801 \ 29 \dots ,$$

$$- \frac{1}{2} p_2(9) = 2,25 ,$$

$$- C_5 \frac{2!}{9^3} = 0,00001 \ 14311 \ 84 \dots ,$$

$$- C_9 \frac{6!}{9^7} = 0,00000 \ 00064 \ 29 \dots ,$$

$$+ 101,87510 \ 59801 \ 29 \dots ;$$

$$\begin{aligned} -\frac{C_3}{9} &= -0,00462 \ 96296 \ 29\dots, \\ -C_7 \frac{4!}{9^5} &= -0,00000 \ 01713 \ 66\dots, \\ -C_{11} \frac{8!}{9^9} &= -0,00000 \ 00004 \ 50\dots, \\ \hline &= -0,00462 \ 98014 \ 45\dots. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$162 \log 3 - \frac{1}{2} q_2(9) = 101,12048 \ 76162 \ 97\dots,$$

et

$$\begin{aligned} \log \beta_2 \left(\frac{1}{2} \right) &= \\ &= 0,21313 \ 91994 \dots - 100,90734 \ 84168 \dots + 101,12048 \ 76162 \dots = \\ &= 0,42627 \ 8988\dots \end{aligned}$$

avec 9 figures exactes.

C'est le même nombre que nous avons déjà trouvé au n° 43 pour $q_2(2)$ ¹⁾.

47. Remplaçons dans (66) $2x$ par x et posons $m=1$; il viendra

$$2 \log v_\lambda(x, 0) = q_\lambda(x) - q_\lambda(x+2) = 2 \log \frac{x^{x\lambda}}{(x+1)^{(x+1)\lambda}},$$

ou

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2 \log \frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}}{x^{x\lambda}}. \quad (67)$$

Reprenons maintenant l'égalité (40) qui peut s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} q_\lambda(x) &= \lambda! \psi_\lambda(x) \log x + \\ &+ p_\lambda(x) - \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+z+2k} - \frac{1}{x+z+2k+1} \right) dz. \end{aligned}$$

¹⁾ Nous verrons plus loin qu'on a toujours

$$\log \beta_\lambda \left(\frac{1}{2} \right) = q_\lambda(2).$$

De cette égalité on tire, en y remplaçant x par $x+1$,

$$q_{\lambda}(x+1) = \lambda! \psi_{\lambda}(x+1) \log(x+1) + \\ + p_{\lambda}(x+1) - \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+z+2k+1} - \frac{1}{x+z+2k+2} \right) dz.$$

On a donc

$$q_{\lambda}(x+1) + q_{\lambda}(x) = \\ = \lambda! [\psi_{\lambda}(x) \log x + \psi_{\lambda}(x+1) \log(x+1)] + p_{\lambda}(x+1) + p_{\lambda}(x) - \\ - \lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda}(z) \frac{dz}{x+z}. \quad (68)$$

Considérons l'intégrale du second membre de cette équation.

Posons

$$x+z = \xi.$$

On aura

$$\int_0^1 \psi_{\lambda}(z) \frac{dz}{x+z} = \int_x^{x+1} \psi_{\lambda}(\xi - x) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (69)$$

La formule de Taylor donne

$$\psi_{\lambda}(-x + \xi) = \psi_{\lambda}(-x) + \psi'_{\lambda}(-x)\xi + \\ + \psi''_{\lambda}(-x) \frac{\xi^2}{2!} + \psi^{(3)}_{\lambda}(-x) \frac{\xi^3}{3!} + \dots + \psi^{(\lambda-1)}_{\lambda}(-x) \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^{\lambda}}{\lambda!}.$$

Or, en vertu de (20) (pour $k = n$),

$$\psi_k(x) = (-1)^k \psi_k(1-x), \quad (k=1, 2, \dots, \lambda)$$

d'où, en échangeant x par $-x$,

$$\psi_k(-x) = (-1)^k \psi_k(1+x).$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi_{\lambda}(-x + \xi)}{\xi} = \frac{\psi_{\lambda}(x+1)}{\xi} - \psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x) \frac{\xi}{2!} - \\ - \psi_{\lambda-3}(1+x) \frac{\xi^2}{3!} + \dots - \psi_1(1+x) \frac{\xi^{\lambda-2}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^{\lambda-1}}{\lambda!},$$

car, en vertu de (23),

$$\psi_{\lambda}^{(k)}(1+x) = \psi_{\lambda-k}(1+x).$$

On trouve donc, en tenant compte de (69),

$$\int_0^1 \psi_{\lambda}(z) \frac{dz}{x+z} = \psi_{\lambda}(x+1) \log \frac{x+1}{x} + P_{\lambda}(x) \frac{1}{\lambda!},$$

où l'on a désigné par $P_{\lambda}(x)$ le polynome suivant (de degré $\lambda-1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda!} P_{\lambda}(x) = & -\psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x) \frac{(x+1)^2 - x^2}{2 \cdot 2!} - \\ & - \psi_{\lambda-3}(1+x) \frac{(x+1)^3 - x^3}{3 \cdot 3!} + \dots \\ & - \psi_1(1+x) \frac{(x+1)^{\lambda-1} - x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{(x+1)^{\lambda} - x^{\lambda}}{\lambda \cdot \lambda!}. \end{aligned} \quad (70)$$

La formule (68) peut s'écrire ainsi

$$q_{\lambda}(x+1) + q_{\lambda}(x) = \lambda! [\psi_{\lambda}(x) + \psi_{\lambda}(x+1)] \log x + \Theta_{\lambda}(x),$$

ou bien, eu égard à (28₂),

$$q_{\lambda}(x+1) + q_{\lambda}(x) = 2x^{\lambda} \log x + \Theta_{\lambda}(x), \quad (71)$$

où l'on a posé

$$\Theta_{\lambda}(x) = p_{\lambda}(x+1) + p_{\lambda}(x) - P_{\lambda}(x).$$

Remplaçons dans (70) x par $x+1$; il viendra

$$q_{\lambda}(x+2) + q_{\lambda}(x+1) = 2(x+1)^{\lambda} \log(x+1) + \Theta_{\lambda}(x+1).$$

Soustrayant cette égalité et (71) l'une de l'autre, on trouve

$$q_{\lambda}(x+2) - q_{\lambda}(x) = 2 \log \frac{(x+1)^{(x+1)^{\lambda}}}{x^{x^{\lambda}}} + \Theta_{\lambda}(x+1) - \Theta_{\lambda}(x),$$

d'où l'on conclut, eu égard à (67),

$$\Theta_{\lambda}(x+1) - \Theta_{\lambda}(x) = 0.$$

Cette identité montre que le polynome $\Theta_\lambda(x)$ doit être égal à une constante que nous désignerons par α_λ .

48. Il est aisé de prouver que

$$\alpha_\lambda = 0.$$

On a, en effet, quel que soit le nombre x ,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x), \quad (71)$$

d'où, en remplaçant x par $-x$,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1-x) + p_\lambda(-x) - P_\lambda(-x). \quad (72)$$

Or [l'égalité (38)],

$$p_\lambda(x) = -p_\lambda(-x), \quad p_\lambda(0) = 0.$$

Posant $x=0$ dans (71) et $x=1$ dans (72), on trouve, par conséquent,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1) - P_\lambda(0),$$

$$\alpha_\lambda = -p_\lambda(1) - P_\lambda(-1),$$

d'où

$$2\alpha_\lambda = -[P_\lambda(0) + P_\lambda(-1)].$$

Posons maintenant dans (70) $x=0$; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda!} P_\lambda(0) &= C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3} \frac{1}{3 \cdot 3!} + C_{\lambda-5} \frac{1}{5 \cdot 5!} + \dots + \\ &+ C_1 \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda \cdot \lambda!}, \end{aligned}$$

car

$$\psi_{\lambda-2s-1}(1) = -C_{2s+1}, \quad \psi_{\lambda+2s}(1) = 0.$$

D'autre part, en se rappelant que

$$\psi_{\lambda-2s-1}(0) = C_{2s+1}, \quad \psi_{\lambda+2s}(0) = 0$$

et en posant dans (70) $x=-1$, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda!} P_\lambda(-1) &= C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3} \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots + \\ &+ C_1 \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda \cdot \lambda!} = \frac{1}{\lambda!} P_\lambda(0). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a_{\lambda} = 0$$

et l'égalité (71) devient

$$q_{\lambda}(x+1) + q_{\lambda}(x) = 2x^{\lambda} \log x. \quad (73)$$

49. Indiquons, en passant, quelques conséquences de l'identité

$$\Theta_{\lambda}(x) = p_{\lambda}(x+1) + p_{\lambda}(x) - P_{\lambda}(x) = 0, \quad (71)$$

que nous venons d'établir.

$\Theta_{\lambda}(x)$ étant un polynome de degré $(\lambda-1)$, on trouve

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda}(x) &= \Theta_{\lambda}(0) + \Theta'_{\lambda}(0)x + \Theta''_{\lambda}(0)\frac{x^2}{2} + \dots \\ &\dots + \Theta_{\lambda}^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \dots + \Theta_{\lambda}^{(\lambda-2)}(0)\frac{x^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!} + \Theta_{\lambda}^{(\lambda-1)}(0)\frac{x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \end{aligned}$$

où, en vertu de (74),

$$\Theta_{\lambda}^{(k)}(0) = p_{\lambda}^{(k)}(1) + p_{\lambda}^{(k)}(0) - P_{\lambda}^{(k)}(0). \quad (75)$$

En se rappelant que $C_k = 0$ pour k pair, on peut écrire [l'égalité (38)]

$$p_{\lambda}(x) = \sum_{j=0}^{\lambda-1} C_{\lambda-j} \mu_{\lambda-j-1} x^j,$$

d'où

$$p_{\lambda}^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j} \mu_{\lambda-j-1} j(j-1) \dots (j-k+1) x^{j-k}.$$

On a donc

$$p_{\lambda}^{(k)}(0) = C_{\lambda-k} \mu_{\lambda-k+1} k!, \quad (76)$$

$$p_{\lambda}^{(k)}(1) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j} \mu_{\lambda-j-1} j(j-1) \dots (j-k+1). \quad (77)$$

Formons maintenant les dérivées de divers ordres du polynome $P_{\lambda}(x)$.

Il est aisé de s'assurer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda! k!} P_{\lambda}^{(k)}(x) = & -\psi_{\lambda-k-1}(1+x) \frac{1}{1.(k+1)!} + \\ & + \psi_{\lambda-k-2}(1+x) \frac{(x+1)^2 - x^2}{2.(k+2)!} - \psi_{\lambda-k-3}(1+x) \frac{(x+1)^3 - x^3}{3.(k+3)!} + \\ & + \dots + (-1)^{k-1} \psi_1(1+x) \frac{(x+1)^{\lambda-k-1} - x^{\lambda-k-1}}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} + \\ & + (-1)^k \frac{(x+1)^{\lambda-k} - x^{\lambda-k}}{(\lambda-k)\lambda!} \end{aligned} \quad (78)$$

pour $k = 1, 2, 3$.

De cette égalité on tire par différentiation, en tenant compte de (20),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda!(k+1)!} P_{\lambda}^{(k+1)}(x) = & -\psi_{\lambda-k-2}(1+x) \frac{1}{1.(k+2)!} + \\ & + \psi_{\lambda-k-3}(1+x) \frac{(x+1)^2 - x^2}{2.(k+3)!} - \psi_{\lambda-k-4}(1+x) \frac{(x+1)^3 - x^3}{3.(k+4)!} + \\ & + \dots + (-1)^k \psi_1(1+x) \frac{(x+1)^{\lambda-k-2} - x^{\lambda-k-2}}{(\lambda-k-2)(\lambda-1)!} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{(x+1)^{\lambda-k-1} - x^{\lambda-k-1}}{(\lambda-k-1)\lambda!}. \end{aligned}$$

Donc l'égalité précédente étant exacte pour $k = 1, 2, 3$, elle le sera aussi pour la valeur de k plus grande d'une unité; par conséquent, cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k = 1, 2, 3, \dots, \lambda - 1$.

Si l'on y pose $x = 0$, on trouve

$$\frac{1}{\lambda! k!} P_{\lambda}^{(k)}(0) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} (-1)^{j-k} \frac{C_{\lambda-1-j}}{(j+1)!(j-k)!}$$

et, eu égard à (75), (76), (77) et (74),

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{\lambda}^{(k)}(0)}{k!} = & C_{\lambda-k} \mu_{\lambda-k-1} + \\ & + \sum_{j=k}^{\lambda-1} \left[\frac{C_{\lambda-j} \mu_{\lambda-j-1} j(j-1) \dots (j-k+1)}{k!} - (-1)^{j-k} \frac{C_{\lambda-j-1} \lambda!}{(j+1)!(j-k)!} \right] = 0. \end{aligned}$$

($k = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1$)

Moyennant les équations (σ_1) du n° 16 nous obtiendrons les relations correspondantes entre les nombres de Bernoulli.

50. Revenons à l'équation générale (73).

L'égalité (67) du n° 47 donne ¹⁾

$$q_\lambda[2(x+1)] - q_\lambda(2x) = 2 \log \frac{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}{(2x)^{(2x)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (43),

$$\log \frac{\beta_\lambda(x+1)}{\beta_\lambda(x)} = \log \frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}$$

ou

$$\beta_\lambda(x+1) = \frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}} \beta_\lambda(x). \quad (79)$$

Cette équation a lieu, comme l'on voit, pour toutes les valeurs réelles et positives de x .

Pour x un entier elle résulte immédiatement de la définition de β_λ à l'aide du rapport que nous avons désigné plus haut (n°s 30 et 31) par $v_\lambda(2, x-2)$.

Si l'on remplace dans (73) $q_\lambda(x)$ par son expression en $\log \beta_\lambda(x)$

$$q_\lambda(x) = q_\lambda(2) - \log \beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \log \pi_\lambda - \log \beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right),$$

on trouve encore l'équation suivante

$$\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right) \beta_\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi_\lambda}{x^{x\lambda}}. \quad (80)$$

Posant enfin dans (73) $x=1$, on obtient

$$q_\lambda(2) + q_\lambda(1) = 0.$$

Par conséquent, en vertu de (43),

$$\log \beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2) = \log \pi_\lambda, \quad (81)$$

$$\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \pi_\lambda, \quad (81_1)$$

¹⁾ Remarquons, en outre, que cette dernière égalité résulte immédiatement de l'équation (73).

résultat, déjà trouvé au n° 46 par le calcul direct dans le cas particulier de $\lambda = 2$.

Remarquons d'avance qu'il existe encore une relation simple entre $\log \beta_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(1-x)$, mais nous la déduirons plus tard.

51. Passons maintenant au développement des fonctions $q_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(x)$ en séries convergentes.

L'égalité (40) du n° 26 donne

$$q_\lambda(x) = \lambda! \psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_\lambda^{(k)}(x), \quad (82)$$

où le terme général a l'expression suivante

$$u_\lambda^{(k)}(x) = -\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \left[\frac{1}{x+2k+z} - \frac{1}{x+2k+1+z} \right] dz.$$

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au n° 49, que

$$\begin{aligned} & \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+z} = \\ &= P_\lambda(x+2k) + \lambda! \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k+1}{x+2k}, \\ & \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+1+z} = \\ &= P_\lambda(x+2k+1) + \lambda! \psi_\lambda(x+2k+2) \log \frac{x+2k+2}{x+2k+1}. \end{aligned}$$

On en tire, après des réductions simples,

$$\begin{aligned} u_\lambda^{(k)}(x) &= P_\lambda(x+2k+1) - P_\lambda(x+2k) + \\ &+ \lambda! \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k}{x+2k+2} + \log \left(1 + \frac{1}{x+2k+1} \right)^{2(x+2k+1)^\lambda}. \end{aligned} \quad (83)$$

Remplaçons $x+2k+1$ par ξ et posons

$$S_\lambda(\xi) = P_\lambda(\xi) - P_\lambda(\xi-1).$$

Remarquant que

$$\begin{aligned} P_{\lambda}(\xi) &= P_{\lambda}(0) + \xi P'_{\lambda}(0) + \frac{\xi^2}{2!} P''_{\lambda}(0) + \dots + \\ &+ \frac{\xi^k}{k!} P^{(k)}_{\lambda}(0) + \dots + \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P^{(\lambda-1)}_{\lambda}(0), \\ P_{\lambda}(\xi-1) &= P_{\lambda}(-1) - \xi P'_{\lambda}(-1) + \frac{\xi^2}{2!} P''_{\lambda}(-1) + \dots + \\ &+ (-1)^k \frac{\xi^k}{k!} P^{(k)}_{\lambda}(-1) + \dots - \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P^{(\lambda-1)}_{\lambda}(-1), \end{aligned}$$

on trouve

$$S_{\lambda}(\xi) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{\xi^k}{k!} \left(P^{(k)}_{\lambda}(0) - (-1)^k P^{(k)}_{\lambda}(-1) \right).$$

Or, en vertu de (78),

$$P^{(k)}_{\lambda}(0) + P^{(k)}_{\lambda}(-1) = 0.$$

Par conséquent,

$$S_{\lambda}(\xi) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{\lambda-2}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2k!} P^{(2k)}_{\lambda}(0).$$

Désignons par $F_{\lambda, k}$ la constante suivante

$$\begin{aligned} F_{\lambda, k} &= 2\lambda! \left[C_{\lambda-k-1} \frac{1}{(k+1)!} - C_{\lambda-k-2} \frac{1}{2(k+2)!} + \dots + \right. \\ &\left. + (-1)^k C_1 \frac{1}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} + (-1)^k \frac{1}{(\lambda-k)\lambda!} \right]. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(x+2k+1) &= P_{\lambda}(x+2k+1) - P_{\lambda}(x+2k) = \\ &= F_{\lambda, 0} + (x+2k+1)^2 F_{\lambda, 2} + (x+2k+1)^4 F_{\lambda, 4} + \dots + \\ &+ (x+2k+1)^{\lambda-2} F_{\lambda, \lambda-2} \end{aligned}$$

et, en vertu de (83),

$$u_{\lambda}^{(k)}(x) = \\ = \log e^{S_{\lambda}(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k}{x+2k+2} \right)^{\lambda! \psi_{\lambda}(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1} \right)^{2(x+2k+1)\lambda}.$$

On trouve donc, eu égard à (82), le développement suivant

$$q_{\lambda}(x) = \lambda! \psi_{\lambda}(x) \log x + p_{\lambda}(x) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \log e^{S_{\lambda}(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k}{x+2k+2} \right)^{\lambda! \psi_{\lambda}(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1} \right)^{2(x+2k+1)\lambda},$$

convergent pour toutes les valeurs positives de la variable x .

Le développement de $\log \beta_{\lambda}(x)$ résulte immédiatement de l'égalité (43).

Posant, en particulier, $\lambda = 0$, nous trouverons

$$\log \beta_0(x) = \log \frac{\pi}{4} - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(2x+2k)(2x+2k+2)}{(2x+2k+1)^2},$$

car

$$\psi_{\lambda}(x) = 1, \quad p_{\lambda}(x) = 0, \quad S_{\lambda}(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \quad \text{pour } \lambda = 0.$$

51. Il faudrait maintenant étudier les propriétés des dérivées de divers ordres ainsi que les relations entre celles-ci et les fonctions primitives $q_{\lambda}(x)$ [ou $\log \beta_{\lambda}(x)$] correspondant aux diverses valeurs de l'indice λ , déduire les expressions de $\log \beta_{\lambda}(x)$ sous la forme de certaines intégrales définies et appliquer les résultats obtenus à la théorie des fonctions $\Gamma_{\lambda}(x)$, mais il est préférable de donner d'abord la définition des fonctions $q_{\lambda}(x)$ [et $\log \beta_{\lambda}(x)$] correspondant aux valeurs impaires de l'indice λ , ce qui fera l'objet de la seconde partie de mon travail qui paraîtra sous peu de temps. (A suivre).

ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ФУНКЦІИ.

В. П. Ермакова.

1. Абелевы функціи.

Абелева функція есть мероморфная періодическая функція, причемъ число основныхъ періодовъ вдвое болѣе числа переменныхъ. Напомню вкратцѣ, какъ получаются Абелевы функціи.

Дано нѣкоторое алгебраическое уравненіе съ двумя переменными:

$$F(z, s) = 0. \quad (1)$$

Изъ этого уравненія мы можемъ разсматривать s какъ функцію z . Разсмотримъ интеграль:

$$\int \varphi(z, s) dz,$$

въ которомъ подынтегральная функція выражается рационально черезъ z и s . Можетъ случиться, что такой интеграль не обращается въ безконечность для всякаго значенія независимаго переменнаго z . Тогда мы имѣемъ такъ называемый интеграль *перваго рода*.

Число линейно независимыхъ интеграловъ перваго рода всегда конечно, это число называется *рангомъ алгебраическаго уравненія* (1).

Пусть независимые интегралы перваго рода будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s) dz, \quad \int \varphi_2(z, s) dz, \quad \dots, \quad \int \varphi_m(z, s) dz.$$

Составимъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s) dz = x_j. \quad (2)$$

$(j=1, 2, \dots, n)$

Изъ этихъ уравненій мы можемъ разсматривать верхніе предѣлы z_1, z_2, \dots, z_n какъ функціи переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Произвольная алгебраическая симметрическая функція верхнихъ предѣловъ будетъ Абелевой функціей.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи говоря о періодической функціи, мы будемъ подразумѣвать лишь такую функцію, число основныхъ періодовъ которой вдвое болѣе числа переменныхъ.

2. Цѣль изслѣдованія.

Теперь является вопросъ: кромѣ Абелевыхъ функцій, существуютъ ли еще другія періодическія функціи.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ доказать слѣдующую теорему:

Всякая мероморфная функція n переменныхъ, имѣющая $2n$ періодовъ, выражается рационально черезъ Абелевы функціи.

Послѣ открытія Götze'емъ и Rosenhain'омъ функцій Θ многихъ переменныхъ возникъ вопросъ: можетъ ли произвольная функція n переменныхъ съ $2n$ періодами выражаться рационально черезъ функціи Θ . На первый взглядъ казалось, что нѣтъ, потому что между періодами функцій Θ существуетъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ извѣстныхъ соотношеній. Въ разгово-

ворѣ съ Гермитомъ Риманъ въ 1860 году утверждалъ, что эти соотношенія должны существовать между $2n$ періодами всякой функціи n переменныхъ, по крайней мѣрѣ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій. Тоже утверждалъ и Вейерштрасъ на своихъ лекціяхъ. Но ни тотъ, ни другой не дали доказательства ¹⁾. Такое доказательство въ первый разъ было дано Poincaré и Picard'омъ въ замѣткѣ, представленной въ Парижскую Академію Наукъ 3 декабря 1883 года.

Такимъ образомъ изъ указанной замѣтки Poincaré и Picard'a вытекаетъ и изложенная здѣсь теорема. Остается только подъ сомнѣніемъ: выражается ли всякая періодическая функція черезъ Абелевы функціи *рационально* или *алгебраически*.

Сверхъ того, по краткости изложенія, вышеупомянутая замѣтка доступна лишь небольшому кругу читателей. Вотъ почему я полагаю, что настоящая статья будетъ не бесполезна для русскихъ читателей.

¹⁾ См. по этому поводу: Monatsber. d. Berl. Akademie der Wissensch., 1869, p. 855.

Journal für d. reine u. angew. Mathem., Bd. LXXXIX.

Bulletin des Sciences mathém. et astronom., 2-e série, t. VI, 1882. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C. W. Borchardt).

3: Особенныя точки функціи.

Чтобы для читателя ничего не оставалось неяснымъ, я долженъ выяснитъ, что называется мероморфною функціей. Не бесполезно также упомянуть о томъ, какія могутъ быть особенныя точки функціи.

Прежде всего я предполагаю, что мы имѣемъ дѣло съ функціей одного переменнаго.

Точка $x = a$ называется *полюсомъ* функціи, если функція въ этой точкѣ обращается въ безконечность, но по умноженіи на нѣкоторую цѣлую степень $x - a$ принимаетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

Въ такомъ случаѣ функція можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ $x - a$, причемъ въ первомъ членѣ $x - a$ войдетъ въ отрицательной степени.

Можетъ случиться, что въ нѣкоторой точкѣ функція можетъ принимать произвольное значеніе, что зависитъ отъ того пути, по которому мы приходимъ въ рассматриваемую точку. Такая точка называется *существенно особенною точкою*. Для примѣра рассмотримъ функцію:

$$\frac{1}{e^x}.$$

Покажемъ, что въ точкѣ $x = 0$ эта функція можетъ принимать произвольное значеніе:

$$\frac{1}{e^x} = A,$$

Пусть одинъ корень этого уравненія будетъ $x = \alpha$,

$$\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}}} = A;$$

тогда всякій другой корень будетъ

$$x = \frac{\alpha}{1 + 2n\pi i}.$$

Съ возрастаніемъ цѣлаго числа n до безконечности этотъ корень стремится къ нулю.

Точка $x = a$ называется *критическою точкою* функціи, если функція можетъ быть разложена въ рядъ по дробнымъ степенямъ $x - a$.

При обходѣ около критической точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній конечно.

Точка $x = a$ называется *трансцендентною* точкою функціи, если функція въ этой точкѣ принимаетъ опредѣленное значеніе (конечное или безконечное), но не можетъ быть разложена въ рядъ ни по цѣлымъ, ни

по дробнымъ степенямъ $x - a$. Такова точка $x = 0$ въ функціи $\log x$. Точка $x = a$ будетъ трансцендентною въ функціи $(x - a)^m$, если показатель m есть число дѣйствительное несоизмѣримое. При обходѣ около трансцендентной точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній безконечно велико ¹⁾.

Функція, не имѣющая конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *голоморфною*.

Такая функція всегда можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x - a$. Этотъ рядъ сходится для всѣхъ значеній x .

Функція, имѣющая полюсы и не имѣющая другихъ конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *мероморфною*; Вейерштрассъ показалъ, что мероморфная функція всегда можетъ быть выражена отношеніемъ двухъ голоморфныхъ функцій.

Функція, имѣющая конечныя существенно особенныя точки и не имѣющая ни критическихъ, ни трансцендентныхъ точекъ, называется *однозначною* (*uniforme, eindeutig*).

Функція, имѣющая критическія или трансцендентныя точки, называется *многозначною*.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ функцію многихъ переменныхъ, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Совокупность частныхъ значеній независимыхъ переменныхъ называется точкою функціи. Чтобы опредѣлить характеръ точки (a_1, a_2, \dots, a_n) , нужно положить:

$$x_1 = a_1 + h_1 t, \quad x_2 = a_2 + h_2 t, \quad \dots \quad x_n = a_n + h_n t,$$

гдѣ h_1, h_2, \dots, h_n произвольныя постоянныя числа. Послѣ такой подстановки функція многихъ переменныхъ обратится въ функцію одного переменнаго t .

Остается теперь опредѣлить характеръ точки $t = 0$.

4. Приводимость періодическихъ функцій.

Пусть даны три періодическія функціи двухъ переменныхъ съ тѣми же четырьмя періодами:

$$f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2), \quad f_3(x_1, x_2). \quad (3)$$

¹⁾ Существенно особенная точка можетъ комбинироваться съ критическою точкою и съ трансцендентною точкою. Такъ, если показатель m есть число мнимое, то точка $x = a$ въ функціи $(x - a)^m$ будетъ одновременно и существенно особенной и трансцендентной. Въ функціи $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ точка $x = 0$ будетъ и существенно особенной и критической.

Пусть даны еще двѣ періодическія функціи:

$$\varphi_1(x_3, x_4), \quad \varphi_2(x_3, x_4). \quad (4)$$

Предположимъ, что эти функціи имѣютъ четыре одинаковые основные періода. Возьмемъ какое нибудь рациональное выраженіе изъ функцій (3) и (4); тогда получимъ періодическую функцію четырехъ переменныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

съ восьмью періодами. Эта функція обращается въ періодическую функцію двухъ переменныхъ, если вмѣсто x_3 и x_4 подставимъ какія нибудь постоянныя величины.

Теперь четыре независимыя переменныя выразимъ линейно черезъ новыя переменныя:

$$x_j = \alpha_j y_1 + \beta_j y_2 + \gamma_j y_3 + \delta_j y_4, \\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

Тогда наша функція превратится въ періодическую функцію новыхъ переменныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4). \quad (5)$$

Сообразно своему составу послѣдняя функція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ. Если изъ уравненій:

$$\alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 + \delta_1 y_4 = a_1, \\ \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 + \delta_2 y_4 = a_2,$$

опредѣлимъ двѣ переменныя и подставимъ въ функцію (5), то эта функція превращается въ функцію двухъ переменныхъ съ четырьмя періодами. Отсюда выясняется слѣдующая теорема.

Дана мероморфная функція n переменныхъ съ $2n$ періодами; выразимъ $n - r$ независимыхъ переменныхъ линейно черезъ остальные независимыя переменныя и подставимъ въ данную функцію; если послѣ этого данная функція превращается въ періодическую функцію съ $2r$ періодами, то данная функція можетъ быть выражена рационально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

Точность этой теоремы подлежитъ нѣкоторому сомнѣнію, но это сомнѣніе можетъ быть устранено послѣ теоремы, которая будетъ доказана въ § 7.

Періодическую функцію назовемъ *неприводимой*, если она не можетъ быть выражена рационально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

5. Неприводимыя рѣшенія періодическихъ уравненій.

Если дана одна періодическая функція, содержащая n переменныхъ, то легко можно составить n независимыхъ функцій съ тѣми же $2n$ періодами. Покажемъ это.

Пусть дана періодическая функція:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ясно, что слѣдующая функція:

$$f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, \dots, x_n + a_n)$$

будетъ также періодическою съ тѣми же періодами. Мы можемъ всегда подобрать a_1, a_2, \dots, a_n такъ, чтобы эти функціи были независимы.

Подобнымъ же образомъ имѣемъ еще третью періодическую функцію:

$$f(x_1 + b_1, x_2 + b_2, \dots, x_n + b_n).$$

Постоянныя b_1, b_2, \dots, b_n опять можно выбрать такъ, чтобы послѣдняя функція не могла быть выражена черезъ предыдущія.

Продолжая далѣе, мы можемъ составить n независимыхъ періодическихъ функцій.

Положимъ, что мы имѣемъ n мероморфныхъ независимыхъ функцій n переменныхъ съ $2n$ періодами; приравняемъ эти функціи произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_j. \quad (6)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

Число рѣшеній этихъ уравненій безконечно велико.

Если къ одному рѣшенію прибавимъ какой нибудь періодъ, то получимъ другое рѣшеніе.

Два рѣшенія періодическихъ уравненій назовемъ неприводимыми, если ихъ разность не приводится къ періоду.

Покажемъ, что число неприводимыхъ рѣшеній періодическихъ уравненій (6) конечно, если функціи, стоящія въ первыхъ частяхъ, мероморфны.

Для этой цѣли перейдемъ отъ мнимыхъ величинъ къ дѣйствительнымъ:

$$x_j = \xi_j + \eta_j i, \quad A_j = B_j + C_j i,$$

$$u_j = \varphi_j + \psi_j i.$$

Уравненія (9) превратятся въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) &= B_j, \\ \psi_j(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) &= C_j. \end{aligned} \quad (7)$$

($j=1, 2, \dots, n$)

Первыя части будутъ уже функціями $2n$ дѣйствительныхъ переменныхъ съ $2n$ дѣйствительными періодами. Мы полагаемъ, что *опредѣлитель, составленный изъ элементовъ основныхъ періодовъ не обращается въ нуль*. Если бы этотъ опредѣлитель обратился въ нуль, то періодическая функція была бы невозможна, такъ какъ тогда можно было бы составить такой періодъ, всѣ элементы котораго были бы безконечно малы.

Преобразуемъ переменныя $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ линейно къ новымъ переменнымъ: y_1, y_2, \dots, y_{2n} . Коэффициенты линейнаго преобразованія всегда можно подобрать такъ, чтобы каждый основной періодъ приводился къ увеличенію одного изъ новыхъ переменныхъ на единицу. Такимъ образомъ уравненія (7) превращаются въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} p_j(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) &= B_j, \\ q_j(y_1, y_2, \dots, y_{2n}) &= C_j. \end{aligned} \quad (8)$$

($j=1, 2, \dots, n$)

Функціи, стоящія въ первой части, не измѣняются, если каждое переменное увеличимъ на единицу.

Мы ищемъ неприводимыя рѣшенія уравненій (8); но каждое такое рѣшеніе при помощи періодовъ можно привести въ такой видъ, чтобы

$$0 < y_j < 1. \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Такимъ образомъ *всѣ неприводимыя рѣшенія будутъ заключаться въ конечномъ объемѣ* ($2n$ измѣреній). Еслибъ число неприводимыхъ рѣшеній было безконечно велико, то эти рѣшенія сгущались бы въ нѣкоторой точкѣ. Но въ такомъ случаѣ эта точка была бы существенно особенной точкой, по крайней мѣрѣ для одной изъ періодическихъ функцій. Но мероморфныя функціи не имѣютъ существенно особенныхъ точекъ.

Отсюда вытекает слѣдующее заключеніе.

Число неприводимыхъ рѣшеній уравненій (6) всегда конечно.

Съ измѣненіемъ постоянныхъ $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$ измѣняются и рѣшенія уравненій (8). Эти рѣшенія, какъ показано выше, заключаются въ конечномъ объемѣ, слѣдовательно ни одно изъ переменныхъ не обратится въ бесконечность. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Уравненія (6) всегда имѣютъ конечныя рѣшенія, каковы бы ни были числа A_1, A_2, \dots, A_n , стояція во вторыхъ частяхъ уравненій.

6. Зависимость между періодическими функціями.

Пусть имѣемъ $n+1$ мероморфныхъ функцій n переменныхъ съ $2n$ періодами:

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ v(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Между этими функціями должна существовать зависимость:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n, v) = 0. \quad (10)$$

Нужно доказать, что эта зависимость будетъ алгебраическая относительно каждой функціи.

Для этой цѣли n какихъ нибудь изъ данныхъ функцій приравняемъ произвольнымъ постояннымъ:

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_j, \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

Было показано, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій конечно; пусть это число равно m .

Подставивъ эти рѣшенія въ функцію v , найдемъ для этой послѣдней функціи только m значеній.

Итакъ, произвольной системѣ значеній u_1, u_2, \dots, u_n соответствуетъ m значеній v . Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (10) относительно v будетъ алгебраическое степени m . Сказанное распространяется на каждую функцію. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Между $n+1$ мероморфными функціями n переменныхъ, имѣющими $2n$ періодовъ, существуетъ зависимость, алгебраическая относительно каждой функціи.

Если число неприводимыхъ рѣшеній уравненій (11) равно m , то уравненіе (10) будетъ, какъ показано выше, степени m относительно v . Можетъ ли это уравненіе имѣть кратные корни относительно v ?

Положимъ, что уравненіе (10) имѣетъ кратные корни относительно v . Въ такомъ случаѣ кратные корни должны удовлетворять алгебраическому уравненію низшей степени:

$$F_1(u_1, u_2, \dots, u_n, v) = 0. \quad (12)$$

Но такъ какъ между функціями (9) существуетъ только одна зависимость, то уравненія (10) и (12) должны имѣть одинаковые корни, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда уравненіе (10) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$F_1^\mu = 0.$$

Каждый корень этого уравненія будетъ кратный, и степень кратности будетъ одна и та же, равна μ , причемъ μ должно быть дѣлителемъ числа m . Сказанное обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только при частномъ выборѣ функции v . Вообще же всегда можно выбрать функцию v такъ, чтобы уравненіе (10) не имѣло кратныхъ корней.

Функції (9) назовемъ основными, если уравненіе (10) не имѣетъ кратныхъ корней.

7. Рациональное выраженіе періодической функціи черезъ основныя функціи.

Возьмемъ n независимыхъ мероморфныхъ функцій n переменныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (13)$$

$(j=1, 2, \dots, n)$

Приравняемъ эти функціи произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_j.$$

$(j=1, 2, \dots, n)$

Положимъ, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій равно m . Подставимъ эти рѣшенія въ двѣ другія періодическія функціи, имѣющія тѣ же періоды, $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для каждой функціи получимъ m значений:

$$v_1, v_2, \dots, v_m,$$

$$w_1, w_2, \dots, w_m. \quad (14)$$

Эти значенія будутъ корнями двухъ алгебраическихъ уравненій:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n, v) = 0, \quad F_1(u_1, u_2, \dots, u_n, w) = 0.$$

Мы можемъ, какъ сказано выше, подобрать функцію v такъ, чтобы ея m значеній были различны.

Составимъ теперь слѣдующую функцію:

$$\Phi(t) = (t - v_1)(t - v_2) \dots (t - v_m).$$

Эта функція симметрична относительно корней (14), а потому коэффиціенты при каждой степени t выражаются рационально черезъ функціи (13).

Составимъ далѣе слѣдующую симметрическую функцію корней (14):

$$\Phi(t) \left(\frac{w_1}{t - v_1} + \frac{w_2}{t - v_2} + \dots + \frac{w_m}{t - v_m} \right) = \Theta(t). \quad (15)$$

Коэффиціенты этой функціи также выражаются рационально черезъ функціи (13).

Въ равенствѣ (15) t произвольно; положимъ $t = v_j$. Такъ какъ между значеніями функціи v нѣтъ равныхъ, то получимъ:

$$\Phi'(v_j) w_j = \Theta(v_j),$$

откуда

$$w_j = \frac{\Theta(v_j)}{\Phi'(v_j)}.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній j отъ 1 до m ; поэтому проще можно написать такъ:

$$w = \frac{\Theta(v)}{\Phi'(v)}.$$

Во второй части, какъ показано выше, входятъ рационально функціи (13). Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Всякая мероморфная функція n переменныхъ съ $2n$ периодами выражается рационально черезъ $n + 1$ основныхъ функцій.

8. Дифференціальныя уравненія періодическихъ функцій.

Возьмемъ систему $n + 1$ основныхъ мероморфныхъ функцій n переменныхъ съ $2n$ періодами:

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ (j=1, 2, \dots, n) \\ v(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Между этими функціями существуетъ алгебраическая зависимость:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n, v) = 0. \quad (17)$$

Было показано, что каждая періодическая функція, имѣющая тѣ же періоды, какъ и функціи (16), выражается рационально черезъ функціи (16). Отсюда слѣдуетъ, что частныя производныя функцій (16) должны выражаться рационально черезъ тѣ же функціи; положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = P_{jk}.$$

Вторая часть послѣдняго уравненія должна быть рациональною функціей u_1, u_2, \dots, u_n, v .

Такимъ образомъ, должны имѣть мѣсто дифференціальныя уравненія:

$$\begin{aligned} du_j = P_{j1} dx_1 + P_{j2} dx_2 + \dots + P_{jn} dx_n. \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (18)$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно dx_1, dx_2, \dots, dx_n , получимъ:

$$\begin{aligned} Q_{j1} du_1 + Q_{j2} du_2 + \dots + Q_{jn} du_n = dx_j. \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (19)$$

Въ этихъ уравненіяхъ коэффициенты Q_{jk} должны выражаться рационально черезъ функціи (16).

Выраженія въ первыхъ частяхъ уравненій (13) должны быть полными дифференціалами; поэтому мы можемъ перейти къ интеграламъ:

$$\begin{aligned} \int (Q_{j1} du_1 + Q_{j2} du_2 + \dots + Q_{jn} du_n) = x_j. \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (20)$$

Всѣ эти интегралы берутся отъ постоянной точки до переменнй (u_1, u_2, \dots, u_n) .

Покажемъ, что ни одинъ изъ интеграловъ (20) не обращается въ бесконечность ни при какихъ значеніяхъ переменныхъ u_1, u_2, \dots, u_n . Допустимъ, что одинъ изъ интеграловъ (20) обращается въ бесконечность, когда $u_1 = a_1, u_2 = a_2, \dots, u_n = a_n$; тогда одно изъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n обязательно обращается въ бесконечность. Въ такомъ случаѣ уравненія:

$$u_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_j \\ (j=1, 2, \dots, n)$$

не имѣютъ конечныхъ рѣшеній, что противорѣчитъ доказанному въ концѣ §-а 5-ого.

Интегралы, которые не обращаются въ бесконечность при всѣхъ значеніяхъ переменныхъ, принято называть *интегралами первого рода*.

Въ уравненіяхъ (20) съ измѣненіемъ переменныхъ u_1, u_2, \dots, u_n измѣняются переменныя x_1, x_2, \dots, x_n , и обратно. Станемъ непрерывно измѣнять переменныя x_1, x_2, \dots, x_n такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ къ этимъ переменнымъ прибавились элементы какого нибудь періода функций (16). Въ такомъ случаѣ переменныя u_1, u_2, \dots, u_n , описавъ замкнутый циклъ, возвратятся къ своимъ прежнимъ значеніямъ. Отсюда заключаемъ, что должны существовать $2n$ основныхъ цикловъ; интегралы (20), взятые по этимъ цикламъ, превращаются въ такъ называемые *модули періодичности*, т. е. въ элементы основныхъ періодовъ функций (16). Произвольный замкнутый цикл можетъ быть приведенъ къ комбинаціи основныхъ цикловъ. Интегралы (20), взятые по произвольному циклу, выразятся линейно черезъ элементы основныхъ періодовъ функций (16); коэффициенты въ этихъ выраженіяхъ будутъ цѣлыми числами.

Разсмотримъ такой замкнутый циклъ, когда измѣняется только одно переменное u_1 , всѣ же остальные переменныя не измѣняются,

$$u_2 = a_2, u_3 = a_3, \dots, u_n = a_n.$$

Тогда уравненіе (17) приводится къ слѣдующему:

$$F(u_1, a_2, a_3, \dots, a_n, v) = 0. \quad (21)$$

Интегралы (20) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\int Q_{11} du_1, \int Q_{21} du_1, \dots, \int Q_{n1} du_1. \quad (22)$$

Все это интегралы первого рода.

Предположимъ, что между интегралами (22) нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффициентами; въ такомъ случаѣ рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n . Пусть

$$Q_{j1} = \varphi_j(u_1, v).$$

Подставимъ z вмѣсто u_1 и s вмѣсто v . Уравненіе (21) будетъ:

$$F(z, a_2, a_3, \dots, a_n, s) = 0. \quad (23)$$

Интегралы (22) будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s) dz, \int \varphi_2(z, s) dz, \dots, \int \varphi_n(z, s) dz. \quad (24)$$

Это интегралы перваго рода; поэтому мы можемъ составить Абелевы функціи, какъ показано въ § 1. Для этой цѣли пишемъ уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{x_0}^{x_k} \varphi_j(z, s) dz = x_j. \quad (25)$$

($j = 1, 2, \dots, n$)

Алгебраическія симметрическія функціи верхнихъ предѣловъ будутъ Абелевыми функціями.

Между этими функціями выберемъ $n + 1$ основныхъ функцій и обозначимъ ихъ черезъ

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (26)$$

($j = 1, 2, \dots, n + 1$).

Періоды этихъ послѣднихъ функцій будутъ комбинаціями основныхъ періодовъ функцій (16). Отсюда слѣдуетъ, что каждый періодъ функцій (26) будетъ періодомъ и функцій (16); но въ такомъ случаѣ функціи (16), какъ доказано въ § 7, выражаются раціонально черезъ функціи (26). Это и нужно было доказать.

Мы доказали, что періодическія функціи (16) выражаются раціонально черезъ Абелевы функціи (26). Но при этомъ доказательствѣ мы предполагали, что рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n .

Предположимъ, что рангъ уравненія (23) меньше n . Въ такомъ случаѣ должна существовать одна или нѣсколько зависимостей формы:

$$\alpha_1 \varphi_1(z, s) + \alpha_2 \varphi_2(z, s) + \dots + \alpha_n \varphi_n(z, s) = 0.$$

Тогда изъ уравненій (25) найдемъ одну или нѣсколько зависимости формы:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = a. \quad (27)$$

Если мы примемъ во вниманіе только независимые интегралы (24), то въ результатѣ получимъ Абелевы функціи съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ и періодовъ. Черезъ такіа Абелевы функціи опять могутъ быть выражены функціи (16), но лишь при томъ условіи, что между перемѣнными существуютъ зависимости (27). Здѣсь мы имѣемъ случай приводимости, указанной въ §-ѣ 4-омъ, когда функціи (16) могутъ быть выражены раціонально черезъ функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ. Но въ такомъ случаѣ мы прежде всего выразимъ функціи (16) раціонально черезъ неприводимыя функціи, а эти послѣднія въ свою очередь можемъ выразить черезъ Абелевы функціи. Такимъ образомъ теорема §-а 2-ого доказана.

КЪ ТЕОРИИ КОННЕКСОВЪ.

[Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)].

Д. М. Свинцова.

§ I.

Общія понятія о конфигураціяхъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

1. Принимая за основной элементъ не точку, прямую или плоскость трехмѣрнаго (Евклидова) пространства въ отдѣльности, а сочетаніе изъ всѣхъ этихъ трехъ основныхъ элементовъ пространства, получаемъ всего ∞^{10} различныхъ элементовъ: каждая изъ ∞^3 точекъ можетъ быть соединена въ элементъ конфигураціи съ каждою изъ ∞^4 прямыхъ и ∞^3 плоскостей: пространство является поэтому многообразіемъ *десяти* измѣреній, притомъ квадратичнаго характера, потому что шесть однородныхъ координатъ p_{ik} прямой связаны уравненіемъ

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Такимъ образомъ рассматриваемое многообразіе можетъ быть отображено не въ плоскомъ многообразіи 10 измѣреній, а выдѣлено изъ плоскаго многообразія 11 измѣреній квадратичнымъ соотношеніемъ между 11 координатами.

Налагая на элементъ (x, p, u) одно простое условіе выдѣляемъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ совокупность ∞^9 элементовъ, налагая два простыхъ условія выдѣлимъ ∞^8 элементовъ и т. д.

Обращаемся сначала къ конфигураціи, выдѣляемой однимъ условіемъ. Пусть связь, налагаемая этимъ условіемъ, выражается аналитически однимъ уравненіемъ между координатами точки x , прямой p и плоскости u элемента (x, p, u) :

$$f(x_1x_2x_3x_4; p_{12}p_{13} \dots p_{34}; u_1u_2u_3u_4) = 0 \quad (1)$$

однороднымъ въ отдѣльности относительно x_i , относительно p_{ik} и относительно u . Такую совокупность ∞^9 элементовъ будемъ называть *коннексомъ* (x, p, u) .

Характеризовать эту конфигурацію можно такъ. Беремъ какую-нибудь точку x_0 пространства. Можетъ случиться что подстановка ея координатъ въ уравненіе (1) обратитъ его въ тождество; тогда всякая прямая и всякая плоскость составятъ вмѣстѣ съ такою точкою элементъ (x_0, p, u) , удовлетворяющій уравненію (1). Такую точку будемъ называть *основною точкою* коннекса.

Такъ если (1) приводится къ виду:

$$\varphi_1(x_1 x_3 x_4) f_1(x, p, u) + \\ + \varphi_2(x_1 x_2 x_3 x_4) f_2(x, p, u) + \varphi_3(x_1 \dots x_4) f_3(x, p, u) = 0$$

то основными точками будутъ точки пересѣченія поверхностей

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0.$$

Такія точки могутъ составлять цѣлую кривую, — на примѣръ въ коннексѣ вида:

$$\varphi_1(x_1 \dots x_4) f_1(x, p, u) + \varphi_2(x_1 \dots x_4) f_2(x, p, u) = 0,$$

основными точками будутъ всѣ точки кривой

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Основные точки могутъ составить и поверхность, если уравненіе (1) распадается на два множителя, изъ которыхъ одинъ содержитъ только координаты x :

$$\varphi(x_1 \dots x_4) f_1(x, p, u) = 0.$$

Въ частности уравненіе поверхности

$$f(x_1 \dots x_4) = 0$$

можетъ быть рассматриваемо какъ уравненіе коннекса (x, p, u) : каждая точка этой поверхности можетъ быть соединена съ каждою прямою и съ каждою плоскостью пространства и будетъ основною точкою, точки же, не лежащія на поверхности, не дадутъ ни одного элемента.

Такимъ образомъ основная точка даетъ начало ∞^7 элементовъ.

Вообще говоря, однако, подстановка координатъ точки x_0 въ уравненіе (1), не обращаетъ его въ тождество, а даетъ уравненіе между коорди-

натами прямой и координатами плоскости, т. е. опредѣляетъ ∞^6 сочетаній (p, u) , образующихъ коннексъ съ элементомъ (прямая, плоскость), который будемъ называть коннексомъ (p, u) , принадлежащимъ точкѣ x_0 , и обозначать $K_{x_0}(p, u)$.

Такіе коннексы имѣютъ въ свою очередь основныя прямыя и основныя плоскости, и слѣдовательно, если въ добавокъ къ точкѣ x_0 мы возьмемъ какую-нибудь прямую p_0 , то можетъ случиться, что уравненіе (1) при такой подстановкѣ:

$$f(x_0, p_0, u) = 0,$$

обратится въ тождество независимо отъ значеній координатъ $u_1 \dots u_4$. Примѣромъ можетъ послужить коннексъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\varphi_1(x, p) f_1(x, p, u) + \\ + \varphi_2(x, p) f_2(x, p, u) + \dots + \varphi_7(x, p) f_7(x, p, u) = 0,$$

которое удовлетворяется независимо отъ значеній u всѣми сочетаніями (x, p) , удовлетворяющими уравненіямъ

$$\varphi_1(x, p) = 0, \quad \varphi_2(x, p) = 0 \dots \varphi_7(x, p) = 0.$$

Эти семь уравненій опредѣляютъ сочетанія (x, p) пересѣченія 7 коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая), и число такихъ сочетаній (если φ_i напр. алгебраическія функции между собою различныя) конечно. Подобныя сочетанія (точка, прямая), можно также называть *основными сочетаніями* (x, p) коннексовъ (1). Каждая основная точка $x_{осн}$ даетъ начало ∞^4 основныхъ паръ $(x_{осн}, p)$, гдѣ p любая прямая.

Если же взятыя точка и прямая не составляютъ основного сочетанія (x, p) , то (1) сводится при подстановкѣ координатъ точки и прямой къ уравненію между координатами плоскости и слѣдовательно опредѣляетъ ∞^2 плоскостей, огибающихъ нѣкоторую поверхность, — только касательныя къ этой поверхности плоскости составляютъ элементъ коннекса (1) вмѣстѣ съ взятыми точкою и плоскостью. Эту поверхность можно называть поверхностью, принадлежащею въ коннексѣ (1) взятымъ прямой и точкѣ. Будемъ обозначать ее U_{xp} .

Такимъ образомъ если (x, p) есть основное сочетаніе, то въ коннексѣ (1) имѣется ∞^3 элементовъ, въ составъ которыхъ она входитъ, если же (x, p) обыкновенная (не основная), то ∞^2 .

Подобнымъ образомъ придемъ къ представленію объ *основныхъ прямыхъ* и *основныхъ плоскостяхъ* и объ *основныхъ сочетаніяхъ* (p, u) и (x, u) ,

причемъ основная прямая даетъ начало ∞^3 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (p, u) и основная плоскость ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u) и ∞^4 основныхъ сочетаній (p, u) , основная точка — ∞^4 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u) .

Если сочетание (p, u) не основное, то ему принадлежит точечная поверхность X_{up} , неосновному сочетанію (x, u) комплексъ P_{xu} , прямой вообще коннексъ $K_p(x, u)$ съ элементомъ (точка, плоскость), плоскости (не основной)—коннексъ $K_u(x, p)$ съ элементомъ (точка, прямая).

Если (1) алгебраическое рациональное степени m относительно x_i , степени r относительно p_{ik} и степени n относительно u_i , то X_{pu} есть поверхность порядка m , P_{xu} — комплексъ ранга r и U_{xp} — поверхность класса n . Числа m, r, n называемъ соответственно порядкомъ, рангомъ и классомъ коннекса (1).

2. Коинциденція. Элементы общіе двумъ коннексамъ (2)

$$f(x, p, u) = 0 \quad f_1(x, p, u) = 0$$

(выдѣляемые двумя условіями)—ихъ всего ∞^8 —образуютъ *коинциденцію* (*простую* въ отличіе отъ дальнѣйшихъ, или просто коинциденцію). Здѣсь каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція прямыхъ (какъ и въ послѣдующемъ мы употребляемъ терминъ „принадлежитъ“ въ томъ смыслѣ, что каждая прямая конгруэнціи дополняетъ (x, u) до элемента (x, p, u) коинциденціи) ранга rr' , если данные коннексы суть

$$(m, r, n) \text{ и } (m', r', n').$$

Каждому сочетанію (x, p) принадлежитъ развертывающаяся класса mn' и каждому сочетанію (p, u) — кривая двойкой кривизны порядка mm' . Далѣе коинциденція содержитъ $mn' + nm'$ элементовъ, которыхъ прямая задана, точка лежитъ на нѣкоторой другой данной прямой и плоскость проходитъ черезъ какую нибудь третью данную прямую; она содержитъ $mr' + rm'$ элементовъ, которыхъ плоскость задана, прямая принадлежитъ данному пучку, и точка лежитъ на данной прямой, и $rn' + nr'$ элементовъ которыхъ точка есть данная, плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и прямая принадлежитъ данному пучку. Иначе говоря, въ коинциденціи (2) каждой точкѣ x пространства принадлежитъ коинциденція (p, u) съ характеристиками

$$(rr', nr' + rn', mn') —$$

пересѣченіе двухъ коннексовъ (p, u) :

$$(r, n) \text{ и } (r', n'),$$

прямой p принадлежит вообще коинциденция (x, u) —пересѣченіе двухъ коннексовъ (x, u) , одного порядка m и класса n , другого порядка m' и класса n' ; характеристики этой коинциденции (x, u) будутъ слѣдовательно:

$$mm', mn' + nm' \text{ и } rn'.$$

Наконецъ плоскости u принадлежит коинциденция сочетаній (x, p) , какъ пересѣченіе двухъ коннексовъ съ элементомъ (x, p) , имѣющая характеристическія числа

$$mm', mr' + rm', rr'.$$

2а. Вышеприведенныя характеристическія числа получаютъ непосредственно изъ разсмотрѣнія уравненій, какъ числа элементовъ удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, поставленнымъ выше. Для разсмотрѣнія двухъ простѣйшихъ въ алгебраическомъ отношеніи конфигурацій это не представляетъ затрудненій. Но уже начиная съ конфигураціи опредѣляемой какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p, u) получаютъ въ числѣ характеристикъ такія, которыя даютъ количество элементовъ (x, p, u) конфигураціи, удовлетворяющихъ условіямъ, наложеннымъ одновременно и на точку и на прямую и на плоскость элемента: такія характеристики такимъ образомъ не сводятся къ характеристикамъ конфигурацій съ болѣе простыми элементами, которыя получаемъ предполагая что точка, прямая или плоскость элемента заданы. Хотя и эти числа могутъ быть получаемы изъ чисто-алгебраическихъ соображеній, но удобно примѣнить для систематическаго вывода ихъ приемы эnumerативной геометріи.

Именно, можно условіе принадлежать данному коннексу (m, r, u) —условіе простое—выразить равенствомъ:

$$\xi_1 = \alpha.p + \beta.g + \gamma.e$$

гдѣ p — условіе для точки лежитъ въ данной плоскости, g — условіе для прямой встрѣчать данную прямую, и e — простое же условіе для плоскости проходить черезъ данную точку. Наложивъ на элементъ (x, p, u) добавочное девятрное условіе: точка x должна лежать на данной прямой, прямая и плоскость должны быть даны, находимъ:

$$\xi_1 p^2 . G . e^3 = \alpha . p^3 . G . e^3 + \beta . p^2 . g G . e^3 + \beta . p^2 . G e^4$$

и такъ какъ

$$G = 1, \quad e^3 = p^3 = 1, \quad gG = 0, \quad e^4 = 0.$$

$$\xi_1 p^2 G e^3 = \alpha.$$

Но мы можемъ число элементовъ, удовлетворяющихъ этому условию получить чисто алгебраически,—оно равно числу элементовъ, которые при данныхъ p, u и n , удовлетворяютъ (1) и уравненіямъ

$$\sum A_i x_i = 0, \quad \sum B_i x_i = 0 \quad (A_i \text{ и } B_i \text{—постоянныя}).$$

Эти уравненія, если (1) порядка m относительно x , имѣютъ m общихъ рѣшеній, слѣдовательно $\alpha = m$.

Точно также найдемъ $\beta = r$, $\gamma = n$, и простое условіе принадлежать данному коннексу (1) выразится

$$\xi_1 = m.p + r.g + n.e.$$

Отсюда для коинциденціи (2)—пересѣченія двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n') получимъ аналогичный символъ,—двойное условіе для (x, p, u) принадлежать тому и другому коннексу одновременно выразится произведеніемъ условій принадлежности элемента каждому изъ нихъ въ отдѣльности:

$$\begin{aligned} \xi_2 = \xi_1 \cdot \xi'_1 &= (m.p + r.g + n.e)(m'.p + r'.g + n'.e) = \\ &= mm'.p^2 + (mr' + rm').pg + (mn' + nm')pe + rr'.g^2 + \\ &\quad + (nr' + rn')ge + nn'.e^2. \end{aligned}$$

Предполагая, что прямая и плоскость даны, накладываемъ семерное условіе $G.e^3$, получимъ слѣдовательно ∞' элементовъ, и можно еще добавить одно условіе для точки лежать въ данной плоскости u ; такимъ образомъ:

$$\xi_2.pGe^3 = mm'$$

что и выражаетъ высказанное выше: если прямая и плоскость даны, то точекъ x заключается въ каждой плоскости mm' — всѣ эти точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка mm' и т. д.

Но коинциденція можетъ и не составлять полного пересѣченія двухъ коннексовъ (x, p, u) . Тогда для опредѣленія нужно знать всѣ ея характеристики. Условіе (двойное) принадлежать коинциденціи напомнимъ вообще:

$$\xi_2 = \alpha_{200}p^2 + \alpha_{110}pg + \alpha_{101}pe + \alpha_{020}g^2 + \alpha_{011}ge + \alpha_{002}e^2$$

или сокращенно:

$$\xi_2 = \sum \alpha_{ikl} p^i g^k e^l$$

причемъ i, k, l цѣлыя положительныя числа или нули, подчиненныя условію

$$i + k + l = 2.$$

Здѣсь слѣдовательно, $(\alpha_{200}, \alpha_{101}, \alpha_{002})$ характеристики коинциденціи (x, u) , принадлежащей данной прямой, $(\alpha_{200}, \alpha_{110}, \alpha_{020})$ —характеристики коинциденціи (x, p) , принадлежащей данной плоскости, $(\alpha_{020}, \alpha_{011}, \alpha_{002})$ —характеристики коинциденціи (p, u) , принадлежащей по (2) данной точкѣ.

3. Двойная коинциденція. Совокупность ∞^7 элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ, можно, какъ и въ коннексахъ съ элементомъ (точка, плоскость), назвать *бикоинциденціей*. Но здѣсь явится надобность разсматривать еще элементы общіе 4, 5 и т. д. коннексамъ (x, p, u) . Поэтому будемъ называть совокупность элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ (m, r, n) , (m', r', n') , (m'', r'', n'') :

$$f(x, p, u) = 0, \quad f_1(x, p, u) = 0, \quad f_2(x, p, u) = 0$$

и всякую вообще совокупность ∞^7 элементовъ (x, p, u) *двойною коинциденціей*.

Каждому сочетанію (p, u) здѣсь принадлежитъ $mm'm''$ точекъ пересѣченія поверхностей

$$X_{pu}, X'_{pu}, X''_{pu},$$

принадлежащихъ (p, u) въ коннексахъ

$$f = 0, f_1 = 0, f_2 = 0;$$

каждому сочетанію (x, p) — $nn'n''$ плоскостей—общихъ касательныхъ поверхностей

$$U_{xp}, U'_{xp}, U''_{xp}$$

тѣхъ же коннексовъ. Наконецъ каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность ранга $2rr'r''$, образуемая прямыми, общими тремъ комплексамъ

$$P_{xu}, P'_{xu}, P''_{xu},$$

принадлежащихъ (x, u) въ тѣхъ же трехъ коннексахъ.

Плоскости u принадлежитъ бикоинциденція сочетаній (x, p) , какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p) съ характеристиками

$$(mm'm'', \sum mm'r'', \sum mr'r'', 2rr'r'').$$

Изъ числа этихъ характеристикъ двѣ уже встрѣчены выше; изъ двухъ остальныхъ первая означаетъ число элементовъ (x, p) , которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а прямая принадлежитъ данному пучку, и слѣдовательно, можетъ быть также истолкована какъ порядокъ кривой двоякой кривизны, принадлежащей прямымъ даннаго пучка, или какъ рангъ комплекса прямыхъ, составляющихъ сочетанія (x, p) взятой бико-

инциденции съ точками данной плоскости; вторая означает число сочетаний (x, p) , которыхъ точка лежитъ на данной прямой, а прямая лежитъ въ данной плоскости или проходитъ черезъ данную точку, и слѣдовательно можетъ быть также истолкована, какъ порядокъ поверхности, образуемой точками, дополняющими до сочетанія разсматриваемой бикоинциденции прямая данной связки или даннаго поля, или же какъ рангъ конгруэнции прямыхъ, дополняющихъ до сочетанія той же бикоинциденции точки данной прямой. Зададимся далѣе прямою p ; ей принадлежитъ бикоинциденція (∞^3) сочетаній (точка x , плоскость u) съ характеристиками:

$$(mm'm'', \sum tm'n'', \sum tn'n'', nn'n'')$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ порядокъ поверхности, точки которой составляютъ сочетание этой бикоинциденции съ плоскостями данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, касательныя къ которой составляютъ сочетание бикоинциденции съ точками данной прямой; третье—порядокъ кривой двоякой кривизны, точки которой составляютъ сочетание бикоинциденции съ плоскостями даннаго пучка, и порядокъ поверхности, касательныя которой соединяются въ сочетание бикоинциденции съ точками даннаго точечнаго поля. Данной точкѣ принадлежитъ въ двойной коинциденции (3) бикоинциденція сочетаній (p, u) съ характеристиками

$$(2rr'r'', \sum nr'r'', \sum nn'r'', nn'n'');$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ число сочетаній (p, u) , которыхъ прямая принадлежитъ данной связкѣ или данному полю, а плоскость—данному пучку, и слѣдовательно, означаетъ также классъ поверхности, принадлежащей прямымъ данной связки или поля, и рангъ конгруэнции, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка; $\sum nn'r''$ означаетъ подобнымъ образомъ число сочетаній (p, u) , которыхъ прямая принадлежитъ данному пучку, а плоскости—данной связкѣ, и слѣдовательно, есть рангъ комплекса, принадлежащаго плоскостямъ данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, принадлежащей прямымъ даннаго пучка.

Кромѣ перечисленныхъ характеристикъ, остается упомянуть еще объ одной, которую нельзя получить, предполагая данными точку, прямую или плоскость элемента (x, p, u) разсматриваемой двойной коинциденции. Это число ея элементовъ (x, p, u) , которыхъ точка лежитъ на данной прямой, прямая принадлежитъ данной связкѣ или полю, и плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Число это равно для двойной коинциденции (3) $\sum tr'n''$.

Условіе (тройное) принадлежать данной двойной биконциденціи можетъ быть изображено такъ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 = & \beta_{300} \cdot p^3 + \beta_{210} p^2 g + \beta_{201} p^2 e + \beta_{120} p g^2 + \beta_{111} p g e + \beta_{102} p e^2 + \beta_{030} g^3 + \\ & + \beta_{021} g^2 e + \beta_{012} g e^2 + \beta_{003} e^3 = \sum \beta_{ikl} p^i g^k e^l \end{aligned}$$

(гдѣ $i + k + l = 3$ и i, k, l равны или болѣе 0 и не болѣе 3).

Если какъ выше было взято, двойная конциденція опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$$(m, r, n), (m', r', n') \text{ и } (m'', r'', n''),$$

то

$$\begin{aligned} \beta_{300} = m m' m'', \beta_{210} = \sum m m' r'', \beta_{201} = \sum m m' n'', \beta_{120} = \sum m r' r'', \\ \beta_{111} = \sum m r' n'', \beta_{102} = \sum m n' n'', \beta_{030} = r r' r'', \beta_{021} = \sum n r' r'', \\ \beta_{012} = \sum n n' r'', \beta_{003} = n n' n''. \end{aligned}$$

Двойная конциденція можетъ также задана, какъ пересѣченіе нѣкоторой простой конциденціи съ характеристиками ($\alpha_{200}, \alpha_{110}, \dots$) и коннекса (m, r, n). Тогда для нея характеристики выразятся такъ:

$$\begin{aligned} \beta_{300} = m \alpha_{210}; \beta_{210} = m \alpha_{110} + r \alpha_{200}; \beta_{201} = m \alpha_{101} + n \alpha_{200}; \\ \beta_{120} = m \alpha_{020} + r \alpha_{110}; \beta_{111} = m \alpha_{011} + r \alpha_{101} + n \alpha_{110}; \beta_{102} = m \alpha_{002} + n \alpha_{101}; \\ \beta_{030} = r \alpha_{020}; \beta_{021} = r \alpha_{011} + n \alpha_{020}; \beta_{012} = r \alpha_{002} + n \alpha_{011}; \beta_{003} = n \alpha_{002}. \end{aligned}$$

4. Тройная конциденція. Четверное условіе, наложенное на элементы (x, p, u), выдѣляетъ совокупность ∞^3 такихъ элементовъ, которую мы назовемъ тройною конциденціею. Она можетъ быть получена, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ, или двухъ простыхъ конциденцій или двойной конциденціи съ коннексомъ или составлять неполное пересѣченіе одного изъ указанныхъ типовъ.

Мы можемъ произвольно взять прямую p . Ей принадлежитъ пара (точечная поверхность, плоскостная поверхность),—точки одной и плоскости, касательныя ко второй, находятся въ однозначномъ соотвѣствіи. Если тройная конциденція опредѣляется четырьмя коннексами

$$(m, r, n), (m', r', n'), (m'', r'', n''), (m''', r''', n'''),$$

то порядокъ первой

$$\sum m m' n'' n''',$$

классъ второй

$$\sum mn'm''n'';$$

число сочетаній (точка, плоскость), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку (иными словами порядокъ кривой, принадлежащей въ этой парѣ данной связкѣ или классъ развертывающейся, которой касательныя составляютъ сочетание пары съ точками данного поля) есть

$$\sum mn'm''n''.$$

Прямымъ данного пучка принадлежитъ биконциденція съ характеристиками

$$(\sum rn'n''n'', \sum mr'n''n'', \sum mn'r''n'', \sum mn'm''r'')$$

прямымъ данной связки—конциденція сочетаній (точка, плоскость) съ характеристиками

$$(\sum mn'r''r'', \sum mn'r''r'', \sum mn'r''r''),$$

наконецъ если прямыя элемента (x, p, u) должны встрѣчать данную прямую, то сочетанія (x, u) , соединяемыя съ этими прямыми, образуютъ коннексъ (∞^2) сочетаній (x, u) порядка

$$2 \sum mr'r''r''$$

и класса

$$2 \sum nr'r''r''.$$

Если зададимся точкою и прямою элемента, то такихъ элементовъ въ тройной конциденціи имѣется

$$2rr'r''r''.$$

Можно тѣ же числа истолковать и иначе изъ данной точки или задаваясь плоскостью. Въ общемъ условіе принадлежать тройной конциденціи есть четверное условіе, которое можетъ быть изображено:

$$\begin{aligned} \xi_4 = & \gamma_{310}p^3g + \gamma_{301}p^3e + \gamma_{220}p^2g^2 + \gamma_{211}p^2ge + \gamma_{202}p^2e^2 + \gamma_{130}pg^3 + \\ & + \gamma_{121}pg^2e + \gamma_{112}pge^2 + \gamma_{103}pe^3 + \gamma_{040}g^4 + \gamma_{031}g^3e + \gamma_{022}g^2e^2 + \gamma_{013}ge^3. \end{aligned}$$

Если тройная конциденція задана пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ, какъ выше, то

$$\begin{aligned} \gamma_{310} = & \sum rm^I m^{II} n^{III}, \gamma_{301} = \sum mn^I m^{II} n^{III}, \gamma_{220} = \sum mn^I r^{II} r^{III}, \\ \gamma_{211} = & \sum mn^I r^{II} n^{III}, \gamma_{202} = \sum mn^I n^{II} n^{III}, \gamma_{130} = \sum mr^I r^{II} r^{III}, \\ \gamma_{121} = & \sum mr^I r^{II} n^{III}, \gamma_{103} = \sum mn^I n^{II} n^{III}, \gamma_{040} = \sum rr^I r^{II} r^{III}, \gamma_{031} = \sum nr^I r^{II} r^{III}, \\ \gamma_{022} = & \sum nn^I r^{II} r^{III}, \gamma_{013} = \sum rn^I n^{II} n^{III}, \gamma_{112} = \sum mr^I n^{II} n^{III}. \end{aligned}$$

Если тройная коинциденция задана пересѣченіемъ двойной коинциденціи

$$(\beta_{300}, \beta_{210}, \beta_{201}, \beta_{120}, \beta_{111}, \beta_{030}, \beta_{021}, \beta_{012}, \beta_{003})$$

съ коннексомъ $(m^{\text{III}}, r^{\text{III}}, n^{\text{III}})$, то для тѣхъ же чиселъ получаемъ выраженія:

$$\begin{aligned} \gamma_{310} &= \beta_{300}r + \beta_{210}m; \gamma_{301} = \beta_{300}n + \beta_{201}m; \gamma_{220} = \beta_{120}m + \beta_{210}r; \\ \gamma_{211} &= m\beta_{111} + r\beta_{201} + n\beta_{210}; \gamma_{202} = m\beta_{102} + n\beta_{201}; \gamma_{130} = m\beta_{030} + r\beta_{120}; \\ \gamma_{121} &= m\beta_{021} + r\beta_{111} + n\beta_{120}; \gamma_{112} = m\beta_{012} + r\beta_{102} + n\beta_{111}; \\ \gamma_{103} &= m\beta_{003} + n\beta_{102}; \gamma_{040} = r\beta_{030}; \gamma_{031} = r\beta_{021} + n\beta_{030}; \\ \gamma_{022} &= r\beta_{012} + n\beta_{021}; \gamma_{013} = r\beta_{003} + n\beta_{012}. \end{aligned}$$

5. Четверная коинциденция состоитъ изъ ∞^5 элементовъ и можетъ быть выдѣлена изъ совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) какимъ либо пятернымъ условіемъ. Она можетъ быть, слѣдовательно, опредѣлена какъ пересѣченіе пяти коннексовъ, простой коинциденціи съ двойною или тройной съ коннексомъ.

Условіе ξ_5 принадлежать такой конфигураціи есть условіе пятерное, которое можетъ быть въ тѣхъ же символахъ изображено

$$\xi_5 = \sum \delta_{ik} p^i q^l e^k \quad (i + k + l = 5).$$

Данной прямой принадлежитъ ∞^1 сочетаній (x, u) образующихъ пару (кривая двойкой кривизны порядка δ_{203} , развертывающаяся поверхность класса δ_{302}), данной точкѣ ∞^2 сочетаній (прямая, плоскость), образующихъ пару (конгруэнція ранга δ_{023} , плоскостная поверхность класса $2\delta_{041}$), причемъ имѣется $2\delta_{032}$ сочетаній (p, u) , которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую, а плоскость проходитъ черезъ данную точку. Данной плоскости принадлежитъ пара (точечн. поверхность порядка $2\delta_{140}$, конгруэнція ранга δ_{320}), причемъ $2\delta_{230}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую въ данной связкѣ. Если возьмемъ пучекъ плоскостей, то сочетанія (x, p) , составляющія элементъ съ одной изъ плоскостей этого пучка, образуютъ пару (точечное пространство, комплексъ ранга $2\delta_{321}$), въ которой съ каждою точкою можетъ соединено $2\delta_{041}$ прямыхъ этого комплекса, прямые, составляющія сочетание съ одною изъ точекъ данной прямой, образуютъ линейчатую поверхность ранга δ_{131} , а составляющія сочетанія съ одною изъ точекъ данного поля—конгруэнцію ранга δ_{221} . Двойственно сочетание (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (комплексъ ранга δ_{113} , плоскостное

пространство), въ которой съ каждой плоскостью можетъ быть соединено $2\delta_{140}$ прямыхъ; прямыя сочетаній (p, u) , которыхъ плоскости принадлежатъ данному пучку, образуютъ линейчатую поверхность ранга $2\delta_{131}$, а прямыя сочетаній, которыхъ плоскости принадлежатъ данной связкѣ,— конгруэнцію ранга δ_{122} . Можно замѣтить также, чтобы исчерпать всѣ характеристики,— что въ совокупности элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, сочетанія (x, u) образуютъ пару (поверхность порядка δ_{113} , поверхность класса δ_{311}), причемъ сочетаній, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣемъ δ_{212} .

Если четверная коинциденція задана какъ пересѣченіе пяти коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{IV}, r^{IV}, n^{IV}),$$

то:

$$\begin{aligned} \delta_{041} &= \sum nr^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{032} = \sum nn^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{023} = \sum nn^{I}n^{II}r^{III}r^{IV}, \\ \delta_{140} &= \sum mr^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{230} = \sum mm^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{320} = \sum mm^{I}m^{II}r^{III}r^{IV}, \\ \delta_{131} &= \sum mn^{I}r^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{122} = \sum mn^{I}n^{II}r^{III}r^{IV}, \quad \delta_{221} = \sum mm^{I}n^{II}r^{III}r^{IV}, \\ \delta_{113} &= \sum mr^{I}n^{II}n^{III}n^{IV}, \quad \delta_{212} = \sum mm^{I}r^{II}n^{III}n^{IV}, \quad \delta_{203} = \sum mm^{I}n^{II}n^{III}n^{IV}, \\ \delta_{311} &= \sum mm^{I}m^{II}r^{III}n^{IV}, \quad \delta_{302} = \sum mm^{I}m^{II}n^{III}n^{IV}. \end{aligned}$$

Если четверная коинциденція является, какъ пересѣченіе тройной коинциденціи съ коннексомъ (m, r, n) , то имѣемъ, означая γ_{ikl} ($i + k + l = 4$) характеристики тройной коинциденціи:

$$\begin{aligned} \delta_{041} &= \gamma_{031}r + \gamma_{040}n; \quad \delta_{032} = \gamma_{023}r + \gamma_{031}n; \quad \delta_{023} = \gamma_{013}r + \gamma_{022}n; \\ \delta_{140} &= \gamma_{040}m + \gamma_{130}r; \quad \delta_{230} = \gamma_{130}m + \gamma_{220}r; \quad \delta_{320} = \gamma_{220}m + \gamma_{310}r; \\ \delta_{131} &= \gamma_{031}m + \gamma_{121}r + \gamma_{130}n; \quad \delta_{122} = \gamma_{022}m + \gamma_{112}r + \gamma_{121}n; \\ \delta_{221} &= \gamma_{121}m + \gamma_{211}r + \gamma_{220}n; \quad \delta_{113} = \gamma_{013}m + \gamma_{103}r + \gamma_{112}n; \\ \delta_{212} &= \gamma_{112}m + \gamma_{202}r + \gamma_{211}n; \quad \delta_{311} = \gamma_{211}m + \gamma_{301}r + \gamma_{310}n; \\ \delta_{203} &= \gamma_{103}m + \gamma_{202}n; \quad \delta_{302} = \gamma_{202}m + \gamma_{301}n. \end{aligned}$$

6. Пятерная коинциденція, составляемая ∞^4 элементами (x, p, u) , удовлетворяющими какому нибудь шестерному условію, можетъ быть получена въ пересѣченіи шести коннексовъ, или въ пересѣченіи четверной коинциденціи съ коннексомъ или тройной съ простою

или въ пересѣченіи двухъ двойныхъ коинциденцій (пересѣченіе трехъ простыхъ коинциденцій есть частный случай пересѣченія простой коинциденціи съ тройной).

Если условіе для (x, p, u) принадлежать такой коинциденціи (алгебраической) изобразимъ:

$$\begin{aligned} \xi_6 = & \mu_{380} p^3 g^3 + \mu_{221} p^3 g^2 e + \mu_{312} p^3 g e^2 + \mu_{303} p^3 e^3 + \mu_{240} p^2 g^4 + \mu_{281} p^2 g^3 e + \\ & + \mu_{222} p^2 g^2 e^2 + \mu_{213} p^2 g e^3 + \mu_{141} p g^4 e + \mu_{132} p g^3 e^2 + \mu_{123} p g^2 e^3 + \\ & + \mu_{042} g^4 e^2 + \mu_{033} g^3 e^3 \end{aligned}$$

то значенія отдѣльныхъ характеристикъ таковы.

Данной прямой принадлежит конечное число μ_{303} сочетаній (x, u) составляющихъ съ нею элементъ. Данной плоскости принадлежит пара (кривая двойкой кривизны порядка $2\mu_{240}$, линейчатая поверхность ранга $2\mu_{330}$). Данной точкѣ—пара (линейчатая поверхность ранга $2\mu_{033}$, развертывающаяся класса $2\mu_{042}$). Прямымъ данного пучка принадлежатъ (т. е. составляютъ элементъ съ одною изъ прямыхъ пучка) сочетанія (x, u) , образующія пару (кривая двойкой кривизны порядка μ_{213} , развертывающаяся класса μ_{312}). Прямымъ данной связки—пара (поверхность порядка μ_{123} , поверхность класса μ_{321}),—каждая точка первой поверхности въ соединеніи съ опредѣленною касательною плоскостью второй дополняетъ одну изъ прямыхъ связки до элемента пятерной коинциденціи; при этомъ число сочетаній (x, u) , которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, равно μ_{222} .

Сочетанія (x, p) тѣхъ элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, образуютъ пару (поверхность порядка $2\mu_{141}$, конгруэнція ранга μ_{231}), причемъ $2\mu_{132}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую встрѣчающую данную прямую. Сочетанія (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точка лежитъ на данной прямой образуютъ пару (конгруэнція ранга μ_{123} ; поверхность класса $2\mu_{141}$) причемъ $2\mu_{132}$ сочетанія имѣютъ плоскость, проходящую черезъ данную точку, и прямую, встрѣчающую данную прямую.

Если пятерная коинциденція опредѣляется какъ пересѣченіе шести коннексовъ

$$(m, r, n), (m^I, r^I, n^I) \dots (m^V, r^V, n^V),$$

то ея характеристики выражаются съ помощью порядка, класса и ранга отдельных коннексовъ слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned}\mu_{330} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V & \mu_{321} &= \sum m m^I m^{II} n^{III} n^{IV} r^V \\ \mu_{312} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} n^{IV} n^V & \mu_{303} &= \sum m m^I m^{II} n^{III} n^{IV} n^V \\ \mu_{240} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V & \mu_{231} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} n^V \\ \mu_{222} &= \sum m m^I n^{II} n^{III} r^{IV} r^V & \mu_{213} &= \sum m m^I r^{II} n^{III} n^{IV} n^V \\ \mu_{141} &= \sum m n^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V & \mu_{132} &= \sum m r^I r^{II} r^{III} n^{IV} n^V \\ \mu_{123} &= \sum m r^I r^{II} n^{III} n^{IV} n^V & \mu_{042} &= \sum n n^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V \\ \mu_{033} &= \sum n n^I n^{II} r^{III} r^{IV} r^V\end{aligned}$$

Если пятрная коинциденція опредѣляется пересѣченіемъ четверной съ коннексомъ (m, r, n) , то

$$\begin{aligned}\mu_{330} &= m \delta_{230} + r \delta_{280}; & \mu_{321} &= \delta_{221} m + \delta_{311} r + \delta_{320} n; \\ \mu_{312} &= \delta_{212} m + \delta_{302} r + \delta_{311} n; & \mu_{303} &= m \delta_{203} + n \delta_{302}; \\ \mu_{240} &= \delta_{140} m + \delta_{230} r; & \mu_{231} &= \delta_{181} m + \delta_{221} r + \delta_{280} n; \\ \mu_{222} &= \delta_{122} m + \delta_{212} r + \delta_{211} n; & \mu_{213} &= \delta_{113} m + \delta_{203} r + \delta_{212} n; \\ \mu_{141} &= \delta_{041} m + \delta_{131} r + \delta_{140} n; & \mu_{132} &= \delta_{032} m + \delta_{122} r + \delta_{131} n; \\ \mu_{123} &= \delta_{023} m + \delta_{113} r + \delta_{122} n; & \mu_{042} &= \delta_{082} r + \delta_{041} n; \\ \mu_{033} &= \delta_{023} r + \delta_{032} n.\end{aligned}$$

7. Шестерная коинциденція. Семь коннексовъ или коннексъ и пятрная коинциденція или коинциденціи простая и четверная или коинциденціи двойная и тройная имѣютъ общими ∞^3 элементовъ, совокупности которыхъ придадимъ названіе шестерной коинциденціи.

Произвольная прямая пространства не принадлежитъ вообще такой конфигураціи, т. е. не входитъ въ составъ ни одного ея элемента; всѣ прямые, входящія въ составъ элементовъ шестерной коинциденціи, образуютъ комплексъ, котораго рангъ означимъ λ_{312} , и каждой такой прямой принадлежитъ опредѣленное сочетаніе (x, u) , вмѣстѣ съ этою прямою образующее элементъ конфигураціи. Произвольно заданной точкѣ принадлежитъ $2\lambda_{043}$ сочетаній (прямая, плоскость), произвольно заданной плоскости— $2\lambda_{340}$ сочетаній (точка, прямая). Элементовъ, которыхъ прямые

принадлежать данному пучку, имѣется λ_{313} , — ихъ прямыя суть прямыя комплекса. Элементовъ, которыхъ прямая проходитъ черезъ данную точку или лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1 : прямыя суть прямыя вышеупомянутаго комплекса, принадлежащія связкѣ съ вершиною въ данной точкѣ и образующія конусъ порядка $2\lambda_{313}$ (или лежащія въ данной плоскости и огибающія плоскую кривую порядка $2\lambda_{313}$), точки этихъ элементовъ заполняютъ кривую двойкой кривизны порядка λ_{223} , а плоскости огибаютъ развертывающуюся класса λ_{322} . Совокупность сочетаній (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{133}$, развертывающаяся класса $2\lambda_{142}$). Если соберемъ всѣ элементы, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, то сочетанія (x, p) этихъ элементовъ образуютъ пару (кривая двойкой кривизны порядка $2\lambda_{241}$, линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{331}$). Наконецъ $2\lambda_{232}$ элементы имѣютъ точку въ данной плоскости, плоскость въ данной связкѣ, и прямую въ данномъ специальномъ линейномъ комплексѣ. Перечисленные 10 характеристикъ такъ выражаются въ случаѣ, если шестерная коинциденція задана, какъ пересѣченіе семи коннексовъ

$$(m, r, n), (m^I, r^I, n) \dots (m^{VI}, r^{VI}, n^{VI}):$$

$$\begin{aligned} \lambda_{340} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V r^{VI}; & \lambda_{331} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V n^{VI}; \\ \lambda_{322} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} n^V n^{VI}; & \lambda_{043} &= \sum n n^I n^{II} r^{III} r^{IV} r^V r^{VI}; \\ \lambda_{133} &= \sum m r^I r^{II} r^{III} n^{IV} n^V n^{VI}; & \lambda_{223} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} n^{IV} n^V n^{VI}; \\ \lambda_{241} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V n^{VI}; & \lambda_{142} &= \sum m r^I r^{II} r^{III} r^{IV} n^V n^{VI}; \\ \lambda_{313} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} n^{IV} n^V n^{VI}; & \lambda_{232} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} n^V n^{VI}. \end{aligned}$$

Если получаемъ шестерную коинциденцію въ пересѣченіи пятерной съ коннексомъ (m, r, n) , то тѣ же характеристики выразятся:

$$\begin{aligned} \lambda_{340} &= m\mu_{240} + r\mu_{330}; & \lambda_{331} &= m\mu_{231} + r\mu_{321} + n\mu_{330}; \\ \lambda_{322} &= m\mu_{222} + r\mu_{312} + n\mu_{321}; & \lambda_{043} &= r\mu_{033} + n\mu_{042}; \\ \lambda_{133} &= m\mu_{033} + r\mu_{123} + n\mu_{132}; & \lambda_{223} &= m\mu_{123} + r\mu_{213} + n\mu_{232}; \\ \lambda_{241} &= m\mu_{141} + r\mu_{231} + n\mu_{240}; & \lambda_{142} &= m\mu_{042} + r\mu_{132} + n\mu_{141}; \\ \lambda_{313} &= m\mu_{213} + r\mu_{303} + n\mu_{312}; & \lambda_{232} &= m\mu_{132} + r\mu_{222} + n\mu_{231}. \end{aligned}$$

Въ виду того, что въ шестерной коинциденціи устанавливается известнаго рода соответствие между всѣми точками пространства, прямыми нѣкотораго комплекса и всѣми плоскостями пространства, можно называть шестерную коинциденцію элементовъ (x, p, u) *тройкою* (точечное пространство, комплекс, плоскостное пространство).

8. Семерная коинциденція. Дальнѣйшую конфигурацію представляет совокупность ∞^8 элементовъ (x, p, u) , выделяемая восьмернымъ условіемъ: пересѣченіемъ восьми коннексовъ или шестерной коинциденціи съ коннексомъ, пятерной коинциденціи съ простою, четверной съ двойною или двухъ тройныхъ. Характеристики ея

$$v_{341}, v_{242}, v_{143}, v_{323}, v_{202}, v_{323},$$

имѣютъ слѣдующее значеніе. Точки элементовъ образуютъ поверхность порядка $2v_{143}$, прямая—конгруэнцію ранга v_{323} ; плоскости огибаютъ поверхность класса $2v_{341}$. Элементовъ, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1 : точки эти образуютъ кривую пересѣченія вышеупомянутой поверхности съ данною плоскостью, прямая покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{233}$, плоскости огибаютъ развертывающуюся класса $2v_{242}$; двойственно элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣется также ∞^1 : ихъ точки образуютъ кривую двойкой кривизны порядка $2v_{242}$, прямая покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{332}$ и плоскости огибаютъ конусъ, касательный къ вышеупомянутой поверхности класса $2v_{341}$ и имѣющій вершину въ данной точкѣ. Поэтому можемъ называть нашу фигуру тройкою: (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность).

Если семерная коинциденція задана восемью коннексами

$$(m, r, n) \dots (m^{VII}, r^{VII}, n^{VII}),$$

то

$$\begin{aligned} v_{341} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V r^{VI} n^{VII}; & v_{143} &= \sum m r^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V n^{VI} n^{VII}; \\ v_{242} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} r^V n^{VI} n^{VII}; & v_{323} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} n^V n^{VI} n^{VII}; \\ v_{332} &= \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V n^{VI} n^{VII}; & v_{233} &= \sum m m^I r^{II} r^{III} r^{IV} n^V n^{VI} n^{VII}. \end{aligned}$$

Отсюда если всѣ коннексы

$$(m, r, n) \dots (m^{VII}, r^{VII}, n^{VII}),$$

суть трилинейные, то порядокъ точечной поверхности тройки равенъ 560, рангъ конгруэнціи 560 и классъ плоскостной поверхности 560. Кривая двойкой кривизны и линейчатая поверхность, принадлежащая плоскостямъ

данной связки, будутъ порядка 840 и ранга 1120; принадлежащія точкамъ данной плоскости линейчатая поверхность и развертывающаяся оказываются ранга 1120 и класса 840.

Если поверхность задана пересѣченіемъ коннекса (m, r, n) съ шестерной коинциденціей, то

$$\begin{aligned} v_{341} &= m\lambda_{340} + r\lambda_{331} + n\lambda_{340}; & v_{143} &= m\lambda_{043} + r\lambda_{133} + n\lambda_{142}; \\ v_{242} &= m\lambda_{142} + r\lambda_{232} + n\lambda_{241}; & v_{323} &= m\lambda_{223} + r\lambda_{313} + n\lambda_{332}; \\ v_{332} &= m\lambda_{232} + r\lambda_{323} + n\lambda_{331}; & v_{233} &= m\lambda_{133} + r\lambda_{228} + n\lambda_{232}. \end{aligned}$$

9. Девять условий отдѣляютъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) ∞^1 такихъ элементовъ, которые образуютъ *тройку* (*кривая двоякой кривизны порядка $2\kappa_{243}$, линейчатая поверхность ранга $2\kappa_{333}$, развертывающаяся класса $2\kappa_{342}$*). Точка первой въ соединеніи съ опредѣленной образующей второй и опредѣленною плоскостью третьей образуютъ элементъ конфигураціи.

Если тройка задана, какъ пересѣченіе девяти коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{\text{VIII}}, r^{\text{VIII}}, n^{\text{VIII}}),$$

то

$$\begin{aligned} \kappa_{342} &= \sum m m^{\text{I}} m^{\text{II}} r^{\text{III}} r^{\text{IV}} r^{\text{V}} r^{\text{VI}} n^{\text{VII}} n^{\text{VIII}}; \\ \kappa_{333} &= \sum m m^{\text{I}} m^{\text{II}} r^{\text{III}} r^{\text{IV}} r^{\text{V}} n^{\text{VI}} n^{\text{VII}} n^{\text{VIII}}; \\ \kappa_{243} &= \sum m m^{\text{I}} r^{\text{II}} r^{\text{III}} r^{\text{IV}} r^{\text{V}} n^{\text{VI}} n^{\text{VII}} n^{\text{VIII}}. \end{aligned}$$

Если, напримѣръ беремъ девять трилинейныхъ коннексовъ, то порядокъ кривой есть 2520, рангъ линейчатой поверхности 3360 и классъ развертывающейся 2520.

Тройка можетъ быть задана также пересѣченіемъ коннекса съ тройкою (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность). Тогда три ея характеристики выразятся

$$\begin{aligned} \kappa_{342} &= m v_{242} + r v_{332} + n v_{341}, & \kappa_{333} &= m v_{233} + r v_{323} + n v_{332}, \\ \kappa_{243} &= m v_{143} + r v_{233} + n v_{242}. \end{aligned}$$

10. Десятерное условіе, наложенное на элементы, даетъ конечное ихъ число. Такимъ образомъ десять коннексовъ

$$(m, r, n) \dots (m^{\text{IX}}, r^{\text{IX}}, n^{\text{IX}})$$

имѣють общихъ элементовъ

$$N = 2 \sum m m^I m^{II} r^{III} r^{IV} r^V r^{VI} n^{VII} n^{VIII} n^{IX}.$$

Конечное число общихъ элементовъ имѣють далѣе коннексъ и тройка (кривая двойкой кривизны, линейчатая поверхность, развертывающаяся). Число это равно

$$N = 2(m\kappa_{243} + r\kappa_{333} + n\kappa_{342}).$$

Простая коинциденція пересѣкается съ тройкою (точечн. поверхность, конгруэнція, плоскости. поверхность) въ

$$N = 2(\alpha_{200}v_{143} + \alpha_{110}v_{233} + \alpha_{101}v_{242} + \alpha_{020}v_{323} + \alpha_{011}v_{332} + \alpha_{002}v_{341})$$

элементахъ. Число элементовъ пересѣченія двойной коинциденціи съ шестерною опредѣляется формулою:

$$N = 2(\beta_{300}\lambda_{043} + \beta_{210}\lambda_{133} + \beta_{201}\lambda_{142} + \beta_{120}\lambda_{223} + \beta_{111}\lambda_{232} + \beta_{102}\lambda_{241} + \\ + \beta_{030}\lambda_{313} + \beta_{021}\lambda_{322} + \beta_{012}\lambda_{331} + \beta_{003}\lambda_{340}).$$

Тройная коинциденція въ пересѣченіи съ пятерною даетъ

$$N = \gamma_{310}\mu_{033} + \gamma_{301}\mu_{042} + \gamma_{220}\mu_{121} + \gamma_{211}\mu_{132} + \gamma_{202}\mu_{141} + \gamma_{130}\mu_{213} + \\ + \gamma_{121}\mu_{223} + \gamma_{112}\mu_{231} + \gamma_{103}\mu_{240} + \gamma_{040}\mu_{303} + \gamma_{031}\mu_{312} + \gamma_{022}\mu_{321} + \gamma_{012}\mu_{331})$$

элементовъ и наконецъ двѣ четверныхъ коинциденціи имѣють

$$N = 2(\delta_{320}\delta_{023}^I + \delta_{311}\delta_{032}^I + \delta_{302}\delta_{041}^I + \delta_{230}\delta_{113}^I + \delta_{221}\delta_{122}^I + \delta_{212}\delta_{131}^I + \\ + \delta_{203}\delta_{140}^I + \delta_{140}\delta_{203}^I + \delta_{131}\delta_{212}^I + \delta_{122}\delta_{221}^I + \delta_{113}\delta_{230}^I + \delta_{041}\delta_{302}^I + \\ + \delta_{032}\delta_{311}^I + \delta_{023}\delta_{320}^I)$$

общихъ элементовъ.

Въ частности, напримѣръ, число элементовъ пересѣченія 10 трилинейныхъ коннексовъ равно

$$2520 + 3360 + 2520 = 8400.$$

11. Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать главнымъ образомъ коннексъ и простую коинциденцію. Поэтому въ заключеніе настоящаго §-а остановимся еще на числѣ произвольныхъ коэффициентовъ,

которое содержит общее уравнение коннекса (m, r, n) . Число членов его уравнения, а следовательно, и число коэффициентов равно

$$N_{(m, r, n)} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Число постоянных, входящих въ это уравнение, можетъ быть однако понижено съ помощью уравненія, связывающаго координаты прямой:

$$\frac{1}{2}(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Поэтому одинъ и тотъ же коннексъ можетъ быть опредѣленъ не только уравненіемъ

$$f(x, p, u) = 0$$

но и всякимъ уравненіемъ

$$f(xpi) + (p, p) \cdot f_1(xpi) = 0$$

гдѣ f_1 функція однородная и степени m отн. x_i , $r-2$ отн. p_{ik} и степени n отн. u съ совершенно произвольными коэффициентами. Съ помощью ея мы можемъ, слѣдовательно, во всякомъ уравненіи $f=0$ уничтожить

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(r-1) \cdot r \cdot (r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

коэффициентовъ, такъ что дѣйствительно независимыхъ остается

$$N_{(m, r, n)}^I = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)^2(r+3)}{1 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

формула эта справедлива и при $r < 2$.

На единицу меньшее число условій (напр., элементовъ) должно быть дано, чтобы опредѣлить вполнѣ коннексъ.

§ II.

Простѣйшія конфигураціи съ элементомъ (x, p, u) .

1. Трилинейный коннексъ.

Уравненіе

$$f(x, p, u) = \sum a_{ijk} x_i p_j u_k = a_x(aa pp)u_a = 0 \quad (1)$$

линейное относительно x_i, p_j и u_k опредѣляетъ трилинейный коннексъ. Оно содержитъ 96 коэффициентовъ, и для полного опредѣленія конфигураціи должны быть заданы 95 ея элементовъ (x, p, u) .

Основныхъ точекъ, прямыхъ или плоскостей общій (т. е. имѣющій уравненіе съ произвольными коэффициентами) трилинейный коннексъ не содержитъ.

Но основныя сочетанія (x, p) , (p, u) , (x, u) принадлежатъ и общему коннексу $(1, 1, 1)$.

Таковы будутъ прежде всего пары (точка, плоскость), общія шести билинейнымъ коннексамъ (x, u) :

$$\frac{df}{dp_{jl}} = \sum a_{ikl} x_i u_k = 0 \quad (j, l = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

Основныхъ сочетаній (точка, плоскость) общій трилинейный коннексъ имѣетъ 20, — по числу элементовъ пересѣченія шести билинейныхъ коннексовъ (x, u) .

Основныя сочетанія (точка, прямая) общаго трилинейнаго коннекса суть элементы пересѣченія четырехъ билинейныхъ коннексовъ (x, p) :

$$\sum a_{ikj} x_i p_j = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

Трилинейный коннексъ (1) имѣетъ ∞^3 основныхъ сочетаній (точка, прямая) образующихъ пару (точечное пространство, комплексъ 4 ранга). Прямыя этихъ сочетаній заполняютъ комплексъ 4 ранга

$$\Delta = \left| \frac{d^3 f}{dx_i du_k} \right| = (aa pp)(bb p^I p^I)(cc p^{II} p^{II})(dd p^{III} p^{III})(abcd)(a\beta\gamma\delta) = 0. \quad (4)$$

Каждой прямой принадлежитъ опредѣленная вообще точка, координаты которой выполняють уравненія (3), при условіи (4) совмѣстныя. Исключенія составляютъ тѣ прямыя, которыя уничтожаютъ не только (4), но и всѣ его первые миноры. Такихъ прямыхъ трилинейный коннексъ содержитъ 162, — по числу прямыхъ пересѣченія четырехъ комплексовъ 3 ранга, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{d\Delta}{df_{11}} = 0 \quad \frac{d\Delta}{df_{22}} = 0 \quad \frac{d\Delta}{df_{33}} = 0 \quad \frac{d\Delta}{df_{44}} = 0$$

гдѣ мы для краткости обозначили

$$f_u = \frac{d^2 f}{dx_i du_i}.$$

Обратно, каждой точкѣ пространства принадлежать двѣ прямыхъ вещественныхъ, или мнимыхъ, прямыхъ пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ (3). Прямыхъ комплекса (4), лежащихъ въ данной плоскости, или проходящихъ черезъ данную точку, принадлежать точки кривой 6-го порядка, и точкамъ данной плоскости принадлежатъ конгруэнція 6-го ранга, лежащая въ комплексѣ (4). Прямыхъ комплекса (4), встрѣчающихъ данную прямую, принадлежатъ поверхность 4-го порядка, и точкамъ данной прямой—линейчатая поверхность ранга 4, всѣ прямые которой составляютъ основныя сочетанія трилинейнаго коннекса съ опредѣленными точками данной прямой.

Основныхъ сочетаній (прямая, плоскость) трилинейный коннексъ имѣетъ также ∞³: они опредѣляются уравненіями

$$\frac{df(x, p, u)}{dx_i} = \sum a_{i, k, n} u_k p_{jn} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

и образуютъ пару (комплексъ 4 ранга, плоскостное пространство). Комплексъ этотъ, какъ легко видѣть, совпадаетъ съ полученнымъ выше комплексомъ (4).

Замѣтимъ, что комплексъ (4) не будетъ самымъ общимъ комплексомъ 4 ранга—онъ зависитъ не отъ 104 параметровъ, какъ общій, а лишь отъ 95.

Можно замѣтить, подобно тому, какъ имѣли выше для основныхъ сочетаній (точка, прямая): съ прямыми комплекса (4), принадлежащими данной связкѣ (или данному полю), составляютъ основное сочетаніе плоскости, огибающія развертывающуюся поверхность 6 класса, и прямые комплекса (4), образующія основныя сочетанія съ плоскостями данной связки, образуютъ конгруэнцію 6 ранга, наконецъ прямыхъ комплекса (4), встрѣчающихъ данную прямую, принадлежатъ (въ указанномъ смыслѣ) касательныя къ поверхности 4 порядка плоскости, и плоскостямъ даннаго пучка—лучи линейчатой поверхности 4 ранга.

Произвольно взятому сочетанію (p, u) ,—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ плоскость v , координаты которой суть

$$\sigma v_i = \frac{df}{dx_i} = a_i(aa pp)u_i.$$

Плоскость v пересѣкается съ плоскостью u взятого сочетанія по прямой q , аксіальныя координаты которой суть

$$\tau \cdot q_{ik} = \sigma(v_i u_k) = (\text{aa } pp) u_x (a_i u_k).$$

Эта прямая встрѣчаетъ прямую p сочетанія, если выполнено условіе

$$\sum q_{ik} p_{ik} = 0$$

т. е.

$$(\text{aa } pp)(\text{aипп})u_x = 0 \quad (6)$$

(гдѣ π означаютъ аксіальныя координаты прямой p), т. е. если взятое (p, u) принадлежитъ опредѣленному этимъ уравненіемъ коннексу 2 ранга и 2-го класса. Итакъ существуетъ ∞^6 сочетаній (p, u) , обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что точки встрѣчи прямой p элемента трилинейнаго коннекса съ плоскостью u того же элемента, и съ v совпадаютъ.

Прямая q совпадаетъ съ прямою p , если существуютъ равенства

$$\lambda(\text{aa } pp)u_x(a_i u_k) = \mu \cdot p_{ik}$$

независимыхъ соотношеній по исключеніи λ/μ получаемъ пять,—такихъ сочетаній имѣемъ слѣдовательно ∞^2 ,—они образуютъ пару: (конгруэнція, поверхность), характеристики этой пары суть $(30, 160, 120)$, гдѣ 120—рангъ конгруэнціи, 30—классъ поверхности пары—т. е. число сочетаній пары, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и 160—число сочетаній, которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую и плоскость проходитъ черезъ данную точку, иными словами рангъ линейчатой поверхности, образуемой прямыми сочетаній, которыхъ плоскости принадлежатъ данной связкѣ, или классъ развертывающейся, огибаемой плоскостями, касательными къ поверхности пары, входящими въ составъ тѣхъ сочетаній, которыхъ прямая встрѣчаютъ данную прямую.

Двойственно, если возьмемъ сочетаніе (x, p) —не принадлежащее къ числу основныхъ,—то ему въ коннексѣ принадлежитъ точка y какъ центръ связки плоскостей, составляющихъ съ (x, p) элементъ трилинейнаго коннекса. Координаты этой точки y :

$$qy_k = a_x(\text{aa } pp)\alpha_k;$$

и слѣдовательно, прямая, соединяющая x и y , имѣетъ радіальныя координаты пропорціональныя опредѣлителямъ:

$$a_x(\text{aa } pp)(a_i x_k) = \tau \cdot q'_{ik}$$

прямая эта встрѣчаетъ прямую p элемента, если взятое нами сочетаніе (x, p) принадлежит коннексу 2-го порядка и 2-го ранга

$$a_x(aa pp)(ax pp) = 0 \quad (7)$$

Точно такъ же, какъ и выше получимъ далѣе пару (поверхность, конгруэнція) съ характеристиками (30, 160, 120), для сочетаній (x, p) которой прямая $q' = (x, y)$ и p совпадаютъ, 30 есть порядокъ поверхности, 120—рангъ конгруэнціи и аналогичное предыдущему значеніе имѣетъ третья характеристика 160.

Для сочетаній (x, p) , принадлежащихъ (7), точка y лежитъ въ плоскости, опредѣляемой точкою x и прямой p сочетанія, или плоскости (x, p) и (y, p) совпадаютъ.

Сочетанію (x, u) принадлежитъ вообще линейный комплексъ. Комплексъ этотъ будетъ специальнымъ, если (x, u) принадлежитъ коннексу (x, u) порядка 2 и класса 2:

$$a_x b_x u_x u_y (aa bb) = 0. \quad (8)$$

Прямой p принадлежитъ въ трилинейномъ коннексѣ (1) опредѣленный билинейный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), устанавливающий, какъ извѣстно, коллинеарное преобразование пространства. Соответственно всѣмъ ∞^4 прямымъ пространства получимъ распределеніе всѣхъ ∞^9 элементовъ (x, p, u) трилинейнаго коннекса на ∞^4 системъ по ∞^5 элементовъ. Можно сказать, что изъ всего многообразія ∞^{16} коллинеаций, трилинейный коннексъ выдѣляетъ многообразіе ∞^4 коллинеаций, которыя для общаго трилинейнаго коннекса всѣ между собою различны (для совпаденія двухъ коллинеаций должны быть выполнены 15 условій, а величинъ для ихъ выполненія имѣемъ лишь 10). Всѣ ∞^4 билинейныхъ коннексовъ, устанавливающихъ эти коллинеации имѣютъ 20 общихъ элементовъ—основныя сочетанія (x, u) трилинейнаго коннекса. Особенности коллинеации, принадлежащей прямой, выдѣляютъ эту прямую изъ числа другихъ, и такимъ образомъ устанавливая инвариантныя формы для коллинеации, получаемъ коварианты трилинейнаго коннекса.

Такимъ образомъ получаемъ прежде всего новое значеніе установленнаго выше комплекса 4-го ранга (4). *Его прямымъ принадлежатъ вырожденныя коллинеации.* Дѣйств., уравненіе его выражаетъ, что опредѣлитель коллинеаций, принадлежащей прямой p , обращается въ 0.

Подобнымъ образомъ прямая p , принадлежащая которымъ коллинеации находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ (т. е. если существуетъ ∞^9 тетраэдровъ, соответствующихъ которымъ въ коллинеации тетраэдры въ нихъ вписаны), образуютъ линейный комплексъ

$$P_1 = (aa pp) a_x = 0. \quad (9)$$

Это приводит нас между прочимъ къ инварианту трилинейнаго коннекса $(aabb)a_{\alpha}b_{\beta}$ (9a), уничтоженіе котораго выражаетъ, что этотъ комплексъ есть вырожденный. Во вписанномъ положеніи тетраэдра находится квадратъ коллинеаціи принадлежащей p

$$(aa\,pp)(bb\,pp)a_{\alpha}b_{\alpha}u_{\beta}=0$$

если прямая принадлежитъ квадратичному комплексу

$$P_2=(aa\,pp)(bb\,pp)a_{\beta}b_{\alpha}=0 \quad (10)$$

и точно также прямые комплекса 3 ранга:

$$P_3=(aa\,pp)(bb\,pp)(cc\,pp)a_{\beta}b_{\gamma}c_{\alpha}=0 \quad (11)$$

даютъ коллинеаціи, 3-я степень которыхъ находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ.

Можно установить еще комплексъ

$$P'_3=(aa\,pp)(bb\,pp)(cc\,pp)\begin{vmatrix} a_{\alpha} & a_{\beta} & a_{\gamma} \\ b_{\alpha} & b_{\beta} & b_{\gamma} \\ c_{\alpha} & c_{\beta} & c_{\gamma} \end{vmatrix}=0 \quad (12)$$

прямые котораго даютъ коллинеаціи въ описанномъ положеніи тетраэдровъ.

Плоскости u принадлежатъ билинейный коннексъ (x, p) и соответственно всѣмъ плоскостямъ пространства получаемъ ∞^3 такихъ коннексовъ, т. е. распредѣляемъ ∞^9 элементовъ на ∞^3 системъ по ∞^6 элементовъ каждая. Получаемая система коннексовъ (x, p) линейна и опирается на пару [точечное пространство, комплексъ 4 ранга (4)].

Каждый билинейный коннексъ (x, p) имѣетъ двѣ основныхъ прямыхъ, которые могутъ быть вещественны и различны, вещественны и совпадать или наконецъ могутъ быть мнимы. Такимъ образомъ каждой плоскости пространства принадлежатъ двѣ прямые,—это именно прямые комплекса (4), принадлежащія этой плоскости, и основной комплексъ (4) есть слѣдовательно, геометрическое мѣсто паръ основныхъ прямыхъ билинейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ плоскостямъ пространства.

Произвольно взятый билинейный коннексъ, принадлежащій плоскости, основныхъ точекъ не имѣетъ. Но въ числѣ ∞^3 плоскостей пространства существуетъ 20, которымъ принадлежатъ билинейные коннек-

сы (x, p) , имѣющіе основную точку,—эти плоскости и соотвѣтствующія имъ точки опредѣляются уравненіями

$$\sum a_{i,k,jl} x_i u_k = \frac{df}{dp_{jl}} = 0 \quad (2)$$

и суть слѣдовательно, плоскости и точки основныхъ сочетаній (x, u) трилинейнаго коннекса.

Двойственно точкѣ x принадлежитъ опредѣленный билинейный коннексъ (p, u) , а всѣмъ ∞^3 точкамъ пространства—линейная система ∞^3 билинейныхъ коннексовъ (p, u) . Основные прямая этихъ коннексовъ образуютъ тотъ же комплексъ 4 ранга (4).

Основные плоскости имѣются только въ тѣхъ коннексахъ, которые выполняютъ тѣже уравненія (2), и слѣдовательно, тѣже 20 точекъ даютъ линейные комплексы (p, u) , имѣющіе каждый основную плоскость.

2. Коинциденція—пересѣченіе двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Элементы (x, p, u) , общіе двумъ трилинейнымъ коннексамъ

$$\begin{aligned} f(x, p, u) &= \sum a_{i,k,jl} x_i u_k p_{jl} = 0, \\ F(x, p, u) &= \sum a'_{i,k,jl} x_i u_k p_{jl} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

образуютъ коинциденцію (простую) изъ ∞^8 элементовъ.

Произвольно взятому сочетанію (p, u) принадлежитъ вообще опредѣленная прямая—пересѣченіе плоскостей v и v' , принадлежащихъ (p, u) въ томъ и другомъ коннексѣ,—точки этой прямой вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (p, u) составляютъ элементъ коинциденціи. Координаты этой прямой выразятся

$$\tau \cdot Q_{ik} = \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{dF}{dx_k} - \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dF}{dx_i} = (aa'pp) (a'a'pp) u_x u_{x'} (a_i a'_k).$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ также прямая, какъ ось пучка плоскостей, каждая изъ которыхъ составляетъ элементъ коинциденціи вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (x, p) . Прямая эта соединяетъ точки y и y' , принадлежащія сочетанію (x, p) въ томъ и другомъ трилинейныхъ коннексахъ.

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція—пересѣченіе двухъ линейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ (x, u) въ томъ и другомъ коннексахъ (1).

Основными сочетаніями явятся тѣ, которымъ принадлежитъ высшее многообразіе точекъ, соотвѣтств. плоскостей и прямыхъ, чѣмъ для произвольно взятаго.

Такимъ образомъ основнымъ сочетаніемъ (p, u) будетъ такое, съ которымъ элементъ коинциденціи составятъ не ∞^1 точекъ, а ∞^2 или даже ∞^3 . Впрочемъ послѣдняго обстоятельства не можетъ встрѣтиться, если оба трилинейныхъ коннекса, опредѣляющіе коинциденцію, будутъ общими. Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо было бы одновременное выполненіе восьми уравненій

$$\frac{df}{dx_i} = 0 \quad \frac{dF}{dx_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

съ семью неизвѣстными. Исключеніе u_k и p_{ik} изъ этихъ восьми уравненій доставитъ соотношеніе между коэффициентами коинциденціи, которое и будетъ выражаться уничтоженіемъ соотвѣтств. совмѣстнаго инварианта двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Поэтому для коинциденціи возможны въ общемъ случаѣ только такія основныя сочетанія (p, u) , съ которыми элементъ ея составляютъ ∞^2 точекъ, образующихъ плоскость. Возможно это прежде всего если (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ одного изъ трилинейныхъ коннексовъ, т. е. если (p, u) выполняютъ уравненія

$$\frac{df}{dx_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

или уравненія

$$\frac{dF}{dx_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5')$$

Такихъ сочетаній коинциденція имѣетъ ∞^3 .

Но кромѣ того, указанное обстоятельство встрѣтится всякій разъ, когда совпадутъ принадлежащія сочетанію плоскости v и v' , и благодаря этому прямая ихъ пересѣченія станетъ неопредѣленною. Чтобы обстоятельство это встрѣтилось, должны быть выполнены уравненія

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{\frac{df}{dx_2}}{\frac{dF}{dx_2}} = \frac{\frac{df}{dx_3}}{\frac{dF}{dx_3}} = \frac{\frac{df}{dx_4}}{\frac{dF}{dx_4}} \quad (14)$$

что даетъ три независимыхъ соотношенія между величинами p_{ik} и u_i . Такимъ образомъ коинциденція (13) имѣетъ ∞^4 основныхъ сочетаній

(x, u) образующихъ двойную коинциденцію (p, u) . Чтобы получить характеристики этой послѣдней, замѣнимъ (14) тремя независимыми соотношеніями, напимѣръ,

$$f_{x_1} F'_{x_2} - f'_{x_1} F_{x_2} = 0, \quad f_{x_2} F'_{x_1} - f'_{x_2} F_{x_1} = 0, \quad f_{x_3} F'_{x_4} - f'_{x_3} F_{x_4} = 0. \quad (15)$$

или символически—три независимыми опредѣлителями матрицы

$$(aa\,pp)(a'a'\,pp)u_\alpha u_{\alpha'} \left\| \begin{array}{c} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 \end{array} \right\| = 0.$$

Но система (15) не вполне эквивалентна системѣ (14),—она удовлетворяется, если (p, u) удовлетворяетъ такимъ системамъ:

$$\begin{array}{l} F'_{x_2} = 0, \quad f'_{x_2} = 0 \quad f_{x_3} F'_{x_4} - f'_{x_3} F_{x_4} = 0 \\ \text{и} \\ F'_{x_4} = 0, \quad f'_{x_4} = 0 \quad f_{x_1} F'_{x_2} - f'_{x_1} F_{x_2} = 0 \end{array} \quad (16)$$

но эти послѣднія не выполняютъ тождественно уравненія

$$F'_{x_4} f'_{x_1} - F_{x_1} f'_{x_4} = 0$$

слѣдующаго изъ (14),—которое также должно быть выполнено искомыми сочетаніями (p, u) . Такія (p, u) должны быть отброшены. Отсюда находимъ, что полученное M_4 ¹⁾ сочетаній (p, u) имѣетъ характеристики (4, 12, 12, 8). Значеніе чиселъ таково: въ разсматриваемой двойной коинциденціи сочетаній (p, u) данной плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 8 ранга, данной прямой—4 плоскости; прямымъ данного поля („Strahlenfeld“) или данной связки—поверхность 12 класса, прямымъ данного пучка—развертывающаяся поверхность 12 класса, обратно плоскостямъ данной связки—комплексъ 12 ранга, плоскостями данного пучка—конгруэнція 12 ранга. Въ составъ этой двойной коинциденціи входятъ и основныя сочетанія того и другого коннексовъ (13).

Аналогичнымъ образомъ мы находимъ основныя сочетанія (x, p) коинциденціи (13) изъ уравненій

$$\frac{df}{du_1} = \frac{df}{du_2} = \frac{df}{du_3} = \frac{df}{du_4} \quad (17)$$

¹⁾ M_4 = многообразіе четырехъ размѣреній, —обозначеніе, которымъ для краткости будемъ пользоваться и далѣе.

которые символически изобразятся

$$(aa'pp)(a'a'pp)a_xa'_x \left\| \begin{array}{l} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \alpha'_4 \end{array} \right\| = 0.$$

Уравнения (17) можно замѣнить другими тремя

$$f'_{u_1} F'_{u_2} - f'_{u_2} F'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2} F'_{u_3} - f'_{u_3} F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3} F'_{u_4} - f'_{u_4} F'_{u_3} = 0 \quad (18)$$

къ которымъ слѣдуетъ добавлять слѣдующее уже изъ нихъ уравненіе

$$f'_{u_4} F'_{u_1} - f'_{u_1} F'_{u_4} = 0$$

чтобы исключить постороннія сочетанія (x, p) , удовлетворяющія уравненіямъ

$$f'_{u_3} = 0 \quad F'_{u_3} = 0 \quad f'_{u_2} F'_{u_4} - f'_{u_4} F'_{u_2} = 6$$

и

$$f'_{u_2} = 0 \quad F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_1} F'_{u_3} - f'_{u_3} F'_{u_1} = 0$$

что даетъ для характеристикъ двойной коинциденціи основныхъ сочетаній (x, p) :

$$G \cdot \xi_3 = 4; \quad pg, \xi_3 = 12 \quad p^2 g, \xi_3 = p^2 g, \tilde{\xi}_3 = 12, \quad p^3 g \tilde{\xi}_3 = 8$$

которые показываютъ, что данной прямой принадлежатъ 4 точки, данной точкѣ—линейчатая поверхность восьмого ранга, прямымъ данной связки—кривая двоякой кривизны 12 порядка и точкамъ данной плоскости—комплекс 12 ранга; прямымъ данной связки или даннаго поля—поверхность 12 порядка, и точкамъ данной прямой—конгруэнція 12 ранга.

Эта двойная коинциденція (x, p) содержитъ разумѣется основныя сочетанія и того и другого коннекса.

Наконецъ основныя сочетанія (x, u) коинциденціи (13) опредѣляются уравненіями:

$$\frac{df}{dp_{12}} = \frac{df}{dp_{13}} = \frac{df}{dp_{14}} = \frac{df}{dp_{34}} = \frac{df}{dp_{42}} = \frac{df}{dp_{23}} \quad (19)$$

$$\frac{df}{dF} = \frac{df}{dF} = \frac{df}{dF} = \frac{df}{dF} = \frac{df}{dF} = \frac{df}{dF}$$

Замѣняя эту систему уравненіями:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dp_{12}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} - \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{12}} &= 0, & \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} - \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} - \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} &= 0, & \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} - \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{23}} - \frac{df}{dp_{23}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

опредѣляющими ∞^1 элементовъ (x, u) образующихъ пару (кривая двойной кривизны, развертывающаяся поверхность), вводимъ постороннія рѣшенія,—пары, опредѣляемые системами уравненій:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{dF}{dp_{13}} &= 0 & \frac{df}{dp_{13}} &= 0 & \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} - \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} - \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} &= 0, & \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{23}} - \frac{df}{dp_{23}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} &= 0 \\
 b) \quad \frac{dF}{dp_{14}} &= 0 & \frac{df}{dp_{14}} &= 0 & \frac{df}{dp_{12}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} - \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{12}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} - \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} &= 0, & \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{23}} - \frac{df}{dp_{23}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} &= 0 \\
 c) \quad \frac{dF}{dp_{34}} &= 0 & \frac{df}{dp_{34}} &= 0 & \frac{df}{dp_{12}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} - \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{12}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} - \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} &= 0, & \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{23}} - \frac{df}{dp_{23}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} &= 0 \\
 d) \quad \frac{dF}{dp_{42}} &= 0 & \frac{df}{dp_{42}} &= 0 & \frac{df}{dp_{12}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} - \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{12}} &= 0, \\
 \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} - \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} &= 0, & \frac{df}{dp_{14}} \cdot \frac{dF}{dp_{34}} - \frac{df}{dp_{34}} \cdot \frac{dF}{dp_{14}} &= 0,
 \end{aligned}$$

которыя не выполняютъ уравненія, слѣдующаго также изъ (19):

$$\frac{dF}{dp_{23}} \cdot \frac{df}{dp_{12}} - \frac{dF}{dp_{12}} \cdot \frac{df}{dp_{23}} = 0.$$

Постороннія рѣшенія эти должны быть отброшены при подсчетѣ порядка и класса пары. Но при этомъ мы дважды отбрасываемъ пары:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dp_{13}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{13}} = 0 \quad \frac{dF}{dp_{34}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{34}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{42}} \cdot \frac{dF}{dp_{23}} - \frac{df}{dp_{23}} \cdot \frac{dF}{dp_{42}} = 0, \\ \frac{dF}{dp_{14}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{14}} = 0 \quad \frac{dF}{dp_{42}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{42}} = 0 \quad \frac{df}{dp_{12}} \cdot \frac{dF}{dp_{13}} - \frac{df}{dp_{13}} \cdot \frac{dF}{dp_{12}} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому порядокъ и классъ этихъ паръ должны быть добавлены. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ получаемъ на основаніи теоремы о пересѣченіи пяти коннексовъ (x, u) ¹⁾.

Точки основныхъ сочетаній (x, u) коинциденціи—пересѣченія двухъ трилинейныхъ коннексовъ образуютъ кривую 32-ю порядка, а плоскости этихъ сочетаній огибаютъ развертывающуюся 32-ю класса. Кривая эта проходитъ черезъ 20 точекъ основныхъ сочетаній (x, u) коннекса $f=0$ и черезъ 20 такихъ же точекъ коннекса $F=0$, а развертывающаяся касается 40 соотвѣствующихъ плоскостей.

До сихъ поръ мы брали сочетанія (p, u) , (x, p) и (x, u) . Заданіемъ теперь прямою p^0 . Въ рассматриваемой коинциденціи (13) этой прямой принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, u) , пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ

$$f(x, p^0, u) = 0, \quad F(x, p^0, u) = 0. \quad (13)$$

Всѣмъ прямымъ пространства принадлежитъ такимъ образомъ ∞^4 такихъ коинциденцій (x, u) , и по свойствамъ ихъ можно классифицировать прямые.

Такъ прежде всего каждая коинциденція имѣетъ основной тетраэдръ, четыре вершины и четыре грани котораго преобразуются одинаково въ коллинеаціяхъ, устанавливаемыхъ тѣмъ и другимъ билинейнымъ коннексомъ. Тетраэдръ этотъ можетъ быть вполне вещественный, или же нѣкоторые или даже всѣ его элементы могутъ быть мнимыми, наконецъ возможны его вырожденія. Отсюда является средство классифицировать коинциденціи (x, u) , а слѣдовательно, и прямые, которымъ онѣ принадлежатъ въ (13).

Четыре основныя точки для коинциденціи

$$f(x, u) = a_x u_x = 0, \quad F(x, u) = a'_x u'_x = 0$$

¹⁾ Теорія коннексовъ, стр. 23.

опредѣляются изъ уравненій

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

что даетъ уравненіе 4-й степени для λ/μ :

$$0 = (abcd) (\alpha\beta\gamma\delta) \lambda^4 + 4(a'bcd) (\alpha'\beta\gamma\delta) \lambda^3\mu + \\ + 6(abc'd') (\alpha\beta\gamma'\delta') \lambda^2\mu^2 + 4(ab'c'd') (\alpha\beta'\gamma'\delta') \lambda\mu^3 + (a'b'c'd') (\alpha'\beta'\gamma'\delta') \mu^4.$$

Примѣняя къ нашей коинциденціи, соответствующей прямой p , получимъ:

$$0 = \lambda^4 (aarp) (bbpp) (ccpp) (ddpp) (abcd) (\alpha\beta\gamma\delta) + \\ + 4(a'a'pp) (bbpp) (ccpp) (ddpp) (a'bcd) (\alpha'\beta\gamma\delta) \lambda^3\mu + \\ + 6\lambda^2\mu^2 (aarp) (bbpp) (c'c'pp) (d'd'pp) (abc'd') (\alpha\beta\gamma'\delta') + \\ + 4(aarp) (b'b'pp) (c'c'pp) (d'd'pp) (ab'c'd') (\alpha\beta'\gamma'\delta') \lambda\mu^3 + \\ + (a'a'pp) (b'b'pp) (c'c'pp) (d'd'pp) (a'b'c'd') (\alpha'\beta'\gamma'\delta') \mu^4.$$

Отдѣльные коэффициенты суть совмѣстные коварианты двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Приведу еще только одинъ примѣръ установленія подобнаго совмѣстнаго коварианта.

Возьмемъ простѣйшій совмѣстный инвариантъ двухъ билинейныхъ кватернарныхъ формъ

$$f(x, u) = a_x u_x \quad \text{и} \quad F(x, u) = a'_x u'_x,$$

именно

$$j = a_x a'_x = \sum_i \sum_k a_{ik} a'_{ki}.$$

Геометрическое его значеніе заключается въ томъ, что при $j=0$ произведенія коллинеаций $f=0$, $F=0$ и лѣвое и правое: fF и Ff находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, т. е. если $f(x, u)=0$ переводить точки A, B, C, D , въ A_1, B_1, C_1, D_1 , а $F(x, u)=0$ въ точки A_2, B_2, C_2, D_2 , затѣмъ производя сначала коллинеацію, устанавливаемую $f(x, u)=0$, а потомъ коллинеацію $F(x, u)=0$ переведемъ A, B, C, D , въ $A_{1,2}, B_{1,2}, C_{1,2}, D_{1,2}$, а при обратномъ порядкѣ выполненіе этихъ коллинеарныхъ преобразованій въ $A_{2,1}, B_{2,1}, C_{2,1}, D_{2,1}$, то оба тетраэдра $A_{12} B_{12} C_{12} D_{12}$ и $A_{21} B_{21} C_{21} D_{21}$ вписаны въ тетраэдръ $ABCD$, т. е. A_{12} и A_{21} лежатъ въ плоскости BCD и т. д.

Томъ VIII, №№ 4 и 5.

СОДЕРЖАНІЕ.

	<i>Стран.</i>
Замѣтки о формулахъ суммированія Эйлера и Буля; <i>В. А. Стеклова</i>	145
Періодическія функціи. <i>В. П. Ермакова</i>	196
Къ теоріи коннексовъ. [Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)]. <i>Д. М. Синцова</i>	210

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества
издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

	<i>Pages.</i>
Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Boole; par <i>W. Stekloff</i>	145
Sur les fonctions périodiques, par <i>W. P. Ermakoff</i>	196
Études sur les connexes, par <i>D. Sintsof</i>	210

Sci 905.75 (1890-1900) Page 1
Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 6.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 6.



ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.

(Рибная улица, домъ № 30-й).

1904.



Составляя такой совместный инвариантъ для коллинеаций, принадлежащих въ коинциденціи (13) прямой p , получимъ: прямая, принадлежащая которымъ коинциденція (x, u) находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, образуютъ комплексъ 2 ранга:

$$(aapp) (a'a'pp) a'_2 a'_1 = 0.$$

Плоскости u принадлежатъ ∞^5 сочетаній (x, p) , образующихъ коинциденцію—пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ (x, p) , и точекъ x — ∞^5 сочетаній (p, u) , образующихъ коинциденцію пересѣченія двухъ билинейныхъ коннексовъ (p, u) .

Чтобы воспользоваться этимъ сведеніемъ на болѣе простыя образованія для изученія самой коинциденціи (13), нужно предварительно ознакомиться ближе со свойствами этихъ послѣднихъ болѣе простыхъ образованій, пока еще очень мало изученныхъ. Ограничимся поэтому въ настоящей статьѣ только указаніемъ на этотъ приемъ сведенія.

3. Двойная коинциденція—пересѣченіе трехъ трилинейныхъ коннексовъ:

$$f(xpu) = 0, \quad F(xpu) = 0, \quad \Phi(xpu) = 0. \quad (15)$$

Сочетанію (p, u) принадлежитъ, вообще говоря, совершенно опредѣленная точка x съ координатами

$$px_i = (aa'pp) (a'a'pp) (a''a''pp) u_2 u_3 u_4 (aa'a'')_i,$$

гдѣ такимъ образомъ символически изображенъ опредѣлитель матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} \\ \frac{d\Phi}{dx_1} & \frac{d\Phi}{dx_2} & \frac{d\Phi}{dx_3} & \frac{d\Phi}{dx_4} \end{vmatrix} \quad (16)$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ подобнымъ образомъ совершенно опредѣленная вообще плоскость u , координаты которой пропорціональны опредѣлителямъ матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{du_1} & \frac{df}{du_2} & \frac{df}{du_3} & \frac{df}{du_4} \\ \frac{dF}{du_1} & \frac{dF}{du_2} & \frac{dF}{du_3} & \frac{dF}{du_4} \\ \frac{d\Phi}{du_1} & \frac{d\Phi}{du_2} & \frac{d\Phi}{du_3} & \frac{d\Phi}{du_4} \end{vmatrix} \quad (17)$$

или символически.

$$\sigma.u_i = (aapp)(a'a'pp)(a''a''pp) a_x a'_x a''_x (aa'a'').$$

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга—пересѣченіе трехъ линейныхъ комплексовъ принадлежащихъ сочетанію (x, u) въ коннексахъ $f=0$, $F=0$ и $\Phi=0$.

Одна и таже точка принадлежитъ безчисленному множеству сочетаній (p, u) . Если зададимся точкою x , то ей будутъ принадлежать ∞^4 сочетаній (p, u) , образующихъ бикоинциденцію (p, u) , въ которой плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга, прямой—одна плоскость, плоскостямъ пучка—конгруэнція 3 ранга, плоскостямъ связки—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—развертывающаяся 3. класса и прямымъ связки (поля)—поверхность 3. класса.

Если зададимся прямою, то ей принадлежитъ бикоинциденція ∞^3 сочетаній (x, u) , въ которой точкѣ принадлежитъ плоскость, плоскости—точка, точкамъ прямой—развертывающаяся 3. класса, точкамъ плоскости поверхность 3. класса, плоскостямъ пучка—кривая двойной кривизны 3. порядка и плоскостямъ связки—поверхность 3. порядка.

Наконецъ плоскости u принадлежитъ ∞^4 сочетаній (x, p) образующихъ бикоинциденцію этихъ сочетаній, въ которой прямой принадлежитъ опредѣленная точка, точкѣ—линейчатая поверхность 2. ранга, точкамъ прямой—конгруэнція 3. ранга, точками плоскости—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—кривая 3. порядка (двойкой кривизны), прямымъ связки—поверхность 3. порядка.

До сихъ поръ мы говорили относительно обыкновенныхъ сочетаній.

Обращаясь къ основнымъ сочетаніямъ, опредѣлимъ прежде всего основныя сочетанія (p, u) . Каждому такому сочетанію должна принадлежать въ двойной коинциденціи не одна точка, а безчисленное множество.

Таковы будутъ прежде всего сочетанія (p, u) , основныя въ одномъ изъ трехъ трилинейныхъ коннексовъ $f=0$, $F=0$ или $\Phi=0$; во вторыхъ тѣхъ, которыя будутъ основными сочетаніями въ одной изъ простыхъ коинциденцій, образуемыхъ двумя какими-либо изъ трехъ этихъ коннексовъ. Наконецъ, основными сочетаніями (p, u) будутъ тѣ, для которыхъ

три плоскости, подчиняемая этому сочетанию коннексами $f=0$, $F=0$, $\Phi=0$, проходят через одну прямую. Для этого должны обращаться в нуль всѣ определители матрицы (16).

Независимых между ними только два, и мы получаемъ такимъ образомъ что основныя сочетанія (p, u) для (15) имѣются въ количествѣ ∞^5 и образуютъ коинциденцію (p, u) .

Характеристики этой коинциденціи опредѣлимъ замѣтивъ, что если взять два какіе нибудь определителя матрицы (16) и приравнять нулю, то введемъ лишнюю коинциденцію сочетаній, которыя дѣлаютъ равными два столбца, общіе этимъ двумъ определителямъ, но не могутъ обратить в нуль вообще двухъ остальныхъ определителей матрицы.

Мы получимъ такимъ образомъ, что въ коинциденціи основныхъ сочетаній (p, u) прямой принадлежитъ развертывающаяся 6 класса, плоскости конгруэнція 6 ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 класса, и плоскостямъ пучка—комплексъ 12 ранга.

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что ∞^5 основныхъ сочетаній (x, p) образуютъ коинциденцію, въ которой прямой принадлежитъ кривая двойкой кривизны 6. порядка, точкѣ—конгруэнція 6. ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 порядка и точкамъ прямолинейнаго ряда—комплексъ 12. ранга.

Основныя сочетанія (x, u) должны обращать в нуль всѣ 15 определителей матрицы

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ji}} \end{array} \right\| = 0. \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

Независимых между ними четыре: основныхъ сочетаній (x, u) двойная коинциденція (15) имѣетъ ∞^2 , образующихъ пару поверхностей. Порядокъ и классъ этихъ поверхностей опредѣлятся равными 36, а рангъ пары, т. е. порядокъ кривой, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка, и классъ развертывающейся, принадлежащей точкамъ даннаго прямолинейнаго ряда, равенъ 54.

4. Если обратимся теперь къ тройной коинциденціи, опредѣляемой пересѣченіемъ четырехъ трилинейныхъ коннексовъ, то замѣтимъ что основныхъ сочетаній (x, p) и (p, u) , здѣсь уже не существуетъ, и до извѣстной степени можно сказать, что основнымъ сочетаніямъ предыдущихъ конфигурацій здѣсь соответствуютъ обыкновенныя сочетанія,—та-

кія, которыя даютъ элементы опредѣляемой коинциденціи. Дѣйствительно, если имѣемъ четыре трилинейныхъ коннекса

$$f(xpi) = 0, \quad g(xpi) = 0, \quad F(xpi) = 0, \quad \Phi(xpi) = 0,$$

то произвольному взятому сочетанію не соответствуетъ вообще говоря ни одной точки, произвольно взятое сочетаніе (x, p) или (p, u) не входитъ вообще говоря въ составъ ни одного элемента конфигураціи. Только тѣ сочетанія (p, u) изъ общаго ихъ многообразія ∞^7 входятъ въ составъ элемента конфигурацій, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0$$

или символически

$$0 = (aapp)(a'a'pp)(a''a''pp)(a'''a'''pp)u_x u_x u_x u_x (aa'a'a''') \quad (19)$$

и слѣдовательно, принадлежатъ коннексу (p, u) 4 ранга и 4 класса.

Точно также только тѣ сочетанія (x, p) входятъ въ составъ элементовъ конфигураціи, которыя принадлежатъ коннексу (x, p) 4 порядка и 4 ранга

$$0 = a_x a'_x a''_x a'''_x (aapp)(a'a'pp)(a''a''pp)(a'''a'''pp)(aa'a'a''') \quad (20)$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u_4} \right) = 0.$$

Если обратимся къ сочетаніямъ (x, u) , то замѣтимъ что каждому такому сочетанію принадлежатъ двѣ прямыхъ—прямыхъ пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ. Слѣдовательно, въ тройной коинциденціи только сочетанія (x, u) и могутъ быть основными: для этого необходимо, чтобы принадлежащія такому сочетанію четыре линейныхъ комплекса имѣли общую линейчатую поверхность. Для этого должны обращаться въ нуль опредѣлители матрицы, составленной изъ коэффициентовъ этихъ четырехъ комплексовъ, что даетъ три независимыхъ условія: *тройная коинциденція—пересѣченіе четырехъ трилинейныхъ коннексовъ—имѣетъ M_3 основныхъ сочетаній (x, u) , образующихъ бикойнциденцію съ характеристиками (64, 192, 192, 64).*

5. Мы здѣсь ограничивались общими случаями, т. е. случаями, когда между коэффициентами уравненій, опредѣляющихъ конфигураціи, не существуетъ связей. Но было бы, конечно, весьма важно, особенно въ виду дальнѣйшихъ приложений, остановиться на случаяхъ вырожденій трилинейныхъ коннексовъ и ихъ коинциденцій.

Укажемъ только на нѣкоторые отдѣльные случаи. Трилинейный коннексъ имѣеть вершину $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ координатнаго тетраэдра основною точкою, если его уравненіе имѣеть видъ

$$x_1 f_1(p, u) + x_2 f_2(p, u) + x_3 f_3(p, u) = 0 \quad (a)$$

къ такому виду помощью преобразованія координатъ можетъ быть сведено уравненіе всякаго трилинейнаго коннекса, имѣющаго основную точку, и слѣдовательно, вообще это уравненіе напишется

$$\alpha_x \cdot f_1(p, u) + \beta_x \cdot f_2(p, u) + \gamma_x \cdot f_3(p, u) = 0 \quad (a')$$

гдѣ α_x , β_x и γ_x означаютъ линейные однородные многочлены отъ $x_1 \dots x_4$.

Замѣтимъ, что трилинейный коннексъ (a) имѣеть уже не ∞^3 основныхъ сочетаній, а ∞^4 , они опредѣляются уравненіями

$$f_1(p, u) = 0, \quad f_2(p, u) = 0, \quad f_3(p, u) = 0$$

и слѣдовательно образуютъ биконниценцію съ характеристиками (1, 3, 3, 1).

Если многочлены α_x , β_x и γ_x связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффициентами, то преобразованіемъ координатъ можно уравненіе коннекса привести къ виду

$$x_1 \cdot f_1(p, u) + x_2 \cdot f_2(p, u) = 0.$$

Здѣсь каждая точка прямой—ребра ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) координатнаго тетраэдра будетъ основною, и такой коннексъ имѣеть основныхъ сочетаній $(p, u) \infty^3$, образующихъ конниценцію (1, 2, 1).

Наконецъ ∞^2 основныхъ точекъ—которыя притомъ составляютъ плоскость,—трилинейный коннексъ можетъ имѣть только тогда, когда уравненіе его распадается:

$$\alpha_x \cdot f(p, u) = 0.$$

Совершенно аналогичны двойственные случаи наличности одной основной плоскости, или пучка плоскостей или наконецъ связки плоскостей,—въ послѣднемъ случаѣ въ уравненіи коннекса долженъ выдѣляться множитель 1-й степени относительно u .

Комплексъ (4), о которомъ мы говорили въ началѣ этого §-а при этомъ уничтожается тождественно.

Аналогичныя замѣчанія могутъ быть сдѣланы и относительно основныхъ прямыхъ.

Трилинейный коннекс может имѣть пару основныхъ прямыхъ, — если 16 линейныхъ комплексовъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ всѣ таковы, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} = \lambda_{ik} \varphi_1 + \mu_{ik} \varphi_2 + \nu_{ik} \varphi_3 + \sigma_{ik} \varphi_4.$$

Далѣе всѣ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ могутъ быть выражены какъ линейныя функціи однихъ и тѣхъ же трехъ линейныхъ функцій отъ p , — тогда основныя прямыя образуютъ линейчатую поверхность 2 ранга, или наконецъ двухъ, — когда основныя прямыя образуютъ линейчатую конгруэнцію — пересѣченіе двухъ этихъ комплексовъ.

6. Остановимся теперь на значеніи въ теоріи коннексовъ (x, p, u) уравненій не содержащихъ одного ряда переменныхъ, и притомъ на тѣхъ уравненіяхъ въ особенности, которыя выражаютъ соединенное положеніе точки, прямой, плоскости между собою.

Вообще говоря, уравненіе $f(x, u) = 0$, изображающее коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), представляетъ теперь, когда за элементъ принимаемъ соединеніе (точка, прямая, плоскость), коннексъ (x, p, u) , которому принадлежатъ такіе элементы (x, p, u) , которыхъ прямая произвольна, а сочетаніе (x, u) должно принадлежать коннексу $f(x, u) = 0$. Такой коннексъ слѣдовательно имѣетъ ∞^5 основныхъ сочетаній (x, u) и ни одного не основного.

Въ частности уравненіе $u_x = (ux) = \sum u_i x_i = 0$ тождественнаго коннекса (x, u) удовлетворяется такими элементами (x, p, u) , которыхъ точка x лежитъ въ плоскости u , а прямая можетъ быть совершенно произвольна. Каждое изъ ∞^5 сочетаній (x, u) въ соединенномъ положеніи дастъ начало ∞^4 элементовъ (x, p, u) этого коннекса и никакихъ другихъ элементовъ принадлежащихъ $u_x = 0$ не существуетъ.

Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ условіями соединеннаго положенія точки и прямой.

Прежде всего условій этихъ не одно, а четыре выражаемыхъ уничтоженіемъ определителей матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

изъ которыхъ независимы только два.

Разъ точка и прямая находятся въ соединеніи то къ каждому изъ такихъ ∞^5 сочетаній можетъ быть добавлена каждая изъ ∞^3 плоскостей пространства.

Но чтобы получить только тѣ элементы (x, p, u) , которыхъ сочетание (x, p) находится въ соединеніи, недостаточно разсматривать только два какія либо изъ указанныхъ опредѣлителей, а нужно одновременно разсматривать всѣ четыре.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ одно которое-нибудь изъ четырехъ уравненій (21), напримѣръ,

$$\begin{aligned}(xpp)_1 &= x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0. \\ &= \pi_{12} x_2 + \pi_{13} x_3 + \pi_{14} x_4 = 0.\end{aligned}\quad (A)$$

Оно изображаетъ конфигурацію такого характера.

Точкѣ x пространства, принадлежитъ вообще спеціальный линейный комплексъ (въ самомъ дѣлѣ для этого комплекса коэффициенты при p_{12} , p_{13} и p_{14} равны нулю и слѣд., инвариантъ $c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}$ обращается въ нуль). Этотъ спеціальный комплексъ образуется прямыми, лежащими въ плоскостяхъ проходящихъ черезъ точку x и черезъ вершину $u_1 = 0$ или $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, координатнаго тетраэдра и слѣдовательно, встрѣчающими прямую, соединяющую двѣ эти точки.

Комплексъ этотъ будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ точекъ такой прямой, за исключеніемъ только точки $u_1 = 0$ или $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, для которой ось коннекса становится неопредѣленною, и съ которою элементъ конфигураціи составляетъ каждая прямая пространства, эта вершина координатнаго тетраэдра есть основная точка коннекса (A).

Если зададимся прямою p , то ей принадлежитъ плоскость, проведенная черезъ прямую и черезъ ту же вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра—т. е. каждая точка x этой плоскости дастъ вмѣстѣ съ взятою прямою элементъ коннекса (A). Если однако прямая взятая проходитъ черезъ вершину $u_1 = 1$, то плоскость—мѣсто точекъ x —становится неопредѣленною: всѣ прямыя

$$p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0$$

которыя въ количествѣ ∞^2 образуютъ указанную связку, суть основныя прямыя коннекса (A).

Подобнымъ образомъ уравненіе

$$(xpp)_2 = x_1 p_{34} + x_3 p_{41} + x_4 p_{12} = 0 \quad (B)$$

представляетъ коннексъ, въ которомъ точкѣ x принадлежитъ спеціальный линейный комплексъ, составленный прямыми, встрѣчающими прямую

$(x, u_2 = 0)$, и прямой—точки плоскости, проведенной через эту прямую и ту же вершину $u_1 = 0$ координатного тетраэдра, и основными прямыми—прямыми связи, имѣющей ее центромъ.

Если возьмемъ оба уравненія (A) и (B) , то вмѣстѣ они опредѣлятъ коинциденцію сочетаній (x, p) . Если теперь задаться точкою x , то соответственная прямая p должна встрѣчать прямую $(x, u_1 = 0)$ и прямую $(x, u_2 = 0)$, —т. е. это будутъ 1^о прямая проходящая черезъ x , 2^о прямая, лежащая въ плоскости, опредѣленной точками $x, u_1 = 0$ и $u_2 = 0$. Но если точка x лежитъ на прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. если изъ ея координатъ $x_3 = 0, x_4 = 0$, то всякая прямая встрѣчающая эту прямую составляетъ съ такою точкою элементъ коинциденціи $(A), (B)$. Такимъ образомъ всѣ точки прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$ суть основныя точки коинциденціи.

Если зададимся прямой p , то соответствующія точки x должны лежать въ плоскостяхъ $(p, u_1 = 0)$ и $(p, u_2 = 0)$ т. е. должны лежать на прямой p , ихъ пересѣченіи. Но если прямая p встрѣчаетъ ось $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. лежитъ въ одной изъ плоскостей пучка $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$, то каждая изъ точекъ этой плоскости составляетъ съ нею элементъ коинциденціи, каждая такая прямая будетъ основною. Условіе этого $p_{34} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ при этомъ (A) и (B) сводятся къ

$$x_3 p_{12} + x_4 p_{23} = 0, \quad x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0$$

которые будутъ совмѣстны при всякихъ p , — ибо исключая x_3, x_4 имѣемъ

$$p_{42} \cdot p_{13} - p_{23} \cdot p_{41} = p_{13} p_{42} + p_{14} p_{13} = 0, —$$

въ силу $p_{34} = 0$ къ этому сводится основное уравненіе

$$(p, p) = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Итакъ получаемъ ∞^3 основныхъ прямыхъ,

Отсюда видимъ, сколько два взятыхъ уравненія (A) и (B) допускаютъ лишннихъ рѣшеній, кромѣ элементовъ (x, p) въ соединеніи.

Добавимъ теперь третье уравненіе (E)

$$(xpp)_3 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + x_4 p_{12} = 0.$$

Съ точкою x составляютъ элементъ конфигураціи тѣ прямая, которая встрѣчаютъ три сходящихся въ точкѣ x прямыхъ, соединяющихъ x съ вершинами $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ координатного тетраэдра. Слѣдовательно, если x не лежитъ въ плоскости этихъ трехъ вершинъ, то прямыми, принадлежащими конфигураціи, могутъ быть только прямая,

проходящая через самую точку x . Но если точка x лежит в плоскости $x_4 = 0$ координатного тетраэдра, то кроме вышеупомянутых всякая прямая, лежащая в той же плоскости, пересечет три прямые $(x, u_1 = 0)$, $(x, u_2 = 0)$, $(x, u_3 = 0)$ и будет вместе с x составлять элемент конфигурации. Точки плоскости $x_4 = 0$ обладают теперь тем свойством, которое при определении коинциденции одними уравнениями (A) и (B) принадлежало всем точкам пространства.

Если возьмем точку ребра координатного тетраэдра, лежащего в грани его $x_4 = 0$, — напр., точку ребра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \text{или} \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

то уравнение (A), (B), (C) примут вид

$$x_2 \cdot p_{34} = 0, \quad x_1 \cdot p_{34} = 0, \quad x_1 \cdot p_{24} + x_2 \cdot p_{41} = 0$$

которые — при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ приводятся к двум

$$p_{34} = 0, \quad x_1 p_{24} + x_2 p_{41} = 0.$$

Таким образом такой точке принадлежит снова ∞^2 прямых, точка ребра основной не будет, с нею могут быть соединены прямые связки с центром в $(x_1, x_2, 0, 0)$ и прямые плоскости $x_4 = 0$.

Если наконец возьмем вершину $u_1 = 0$ координатного тетраэдра то $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и (A) удовлетворяется тождественно, а (B) и (C) приводятся к $x_1 p_{34} = 0$, $x_1 p_{24} = 0$, и так как $x_1 \neq 0$, то должно быть $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$.

Основное соотношение $(p, p) = 0$ дает тогда

$$p_{14} \cdot p_{32} = 0.$$

и таким образом имеем одну из двух систем

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = 0 \quad \text{или же} \quad p_{23} = p_{34} = p_{42} = 0.$$

Снова получаем ∞^2 прямых, и вершина координатного тетраэдра основною точкою не будет.

Задаемся прямою p . Точки, принадлежащие этой прямой в силу (A), (B), (C), должны принадлежать одновременно трем плоскостям, проведенным через прямую p и через вершины $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и $u_3 = 0$ координатного тетраэдра. Если три эти плоскости различны, или сводятся к двум, — когда прямая p встречает ребро тетраэдра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \text{или} \quad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \text{или} \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

то x можетъ быть только точкою пересѣченія этихъ плоскостей, т. е. должна лежать на взятой прямой p . Но если p лежитъ въ плоскости трехъ помянутыхъ вершинъ (т. е. въ плоскости $x_4 = 0$ въ нашемъ случаѣ) то всѣ три плоскости сливаются въ одну, и каждая точка этой плоскости можетъ быть соединяема съ такою прямою въ элементъ конфигураціи. Итакъ получимъ что и при добавленіи 3-го уравненія получается еще ∞^2 основныхъ прямыхъ.

Возьмемъ наконецъ всѣ четыре уравненія:

$$\left. \begin{aligned} +x_2p_{34} + x_3p_{42} + x_4p_{23} &= 0, \\ x_1p_{34} + \quad + x_3p_{41} + x_4p_{13} &= 0, \\ x_1p_{24} + x_2p_{41} + \quad + x_4p_{12} &= 0, \\ x_1p_{23} + x_2p_{31} + x_3p_{12} + \quad &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Теперь заданной прямой принадлежать точки, лежація одновременно въ четырехъ плоскостяхъ,—проходящихъ черезъ взятую прямую и черезъ вершины координатнаго тетраэдра. Если даже прямая лежитъ въ одной изъ граней этого тетраэдра или совпадаетъ съ однимъ изъ его реберъ, то изъ четырехъ плоскостей двѣ будутъ различны и слѣдовательно, точки, дающія элементъ конфигураціи со взятою прямою должны непремѣнно лежать на самой прямой. Основныхъ прямыхъ нѣтъ. Если зададимся точкою, то принадлежащая ей прямая должны встрѣчать четыре прямыхъ, соединяющихъ точку съ вершинами координатнаго тетраэдра; прямая эти могутъ сводиться къ тремъ, не лежащимъ въ одной плоскости, если точка лежитъ въ одной изъ граней, на одномъ изъ реберъ или совпадаетъ съ одною изъ вершинъ этого тетраэдра, но во всякомъ случаѣ искомыя прямая могутъ быть только прямая, проходящая черезъ самую взятую точку.

Итакъ постороннія рѣшенія устраняются выполнѣ только при одновременномъ привлеченіи всѣхъ четырехъ уравненій (21').

Совершенно аналогично убѣдимся что уравненія, выражающія соединенное положеніе прямой и плоскости

$$\left. \begin{aligned} +u_2\pi_{34} + u_3\pi_{42} + u_4\pi_{23} &= 0, \\ u_1\pi_{34} + \quad + u_3\pi_{41} + u_4\pi_{13} &= 0, \\ u_1\pi_{24} + u_2\pi_{41} + \quad + u_4\pi_{12} &= 0, \\ u_1\pi_{23} + u_2\pi_{31} + u_3\pi_{12} + \quad &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

должны быть приняты во вниманіе всѣ четыре для того, чтобы со всякою плоскостью могли быть соединены только прямая, въ ней лежащая, и со всякою прямою только плоскости, черезъ прямую проходящія.

Наконецъ замѣтимъ, что если хотимъ изъ всѣхъ ∞^{10} элементовъ (x, p, u) пространства выдѣлить тѣ, въ которыхъ точка x , прямая p и плоскость u находятся въ соединеніи, то нужно взять уравненія (21') и (22), а уравненіе $u_x = 0$ уже въ нихъ заключается и такимъ образомъ получимъ ∞^8 элементовъ, которыхъ точка лежитъ на прямой и прямая лежитъ въ плоскости.

§ III.

Особенные элементы.

1. Если сочетаніе (p, u) не будетъ основнымъ, ему принадлежить въ силу уравненія коннекса

$$f(x, p, u) = 0 \quad (1)$$

опредѣленная поверхность X_{pu} порядка m (если f — степени m относительно x).

Если (1) имѣетъ основную точку, то всѣ поверхности X_{pu} проходятъ черезъ эту точку. Если (x, p) или (x, u) суть основныя сочетанія, то черезъ точку x проходятъ всѣ X_{pu} въ которыхъ p , гезр. u суть прямая (или плоскость) основнаго сочетанія.

Изъ точекъ поверхности X_{pu} выдѣляются ея особенныя точки, онѣ даютъ начало кратнымъ элементамъ коннекса: каждую особенную точку можемъ считать соединеніемъ нѣсколькихъ обыкновенныхъ, стало быть и элементъ (x, p, u) коннекса (1), содержащій эту точку, явится кратнымъ элементомъ коннекса по отношенію къ точкѣ или *точечнымъ особеннымъ* элементомъ. Касательная къ X_{pu} въ ея точкѣ x

$$\sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

въ случаѣ точечно-особеннаго элемента становится неопредѣленною, потому что для особенной точкѣ поверхности X_{pu} должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \quad (3)$$

Вмѣсто (2) будемъ поэтому имѣть уравненіе

$$\sum X_i X_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (4)$$

которое изображает при этомъ конусъ, потому что изъ (3) слѣдуетъ, что гес-
сienъ (1) въ отношеніи x_i равенъ нулю:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| = a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} (aapp) (bbpp) (ccpp) (ddpp) u_x^n u_y^n u_z^n u_w^n = 0. \quad (5)$$

Уравненія (3) опредѣляютъ ∞^6 элементовъ (x, p, u) . Произвольно
задать прямую p и плоскость u мы для общаго коннекса не можемъ.
Сочетанія (p, u) , принадлежащія которымъ поверхности X_{pu} обладаютъ
особенною точкою, образуютъ по предыдущему коннексъ ранга $4(m-1)^3 r$
и класса $4(m-1)^3 n$. Каждая точка пространства является особенною
точкою на поверхностяхъ X_{pu} принадлежащихъ ∞^3 сочетаніямъ (p, u)
образующимъ пару (комплексъ ранга $4rn^3$, плоскостное пространство),
въ которой каждой плоскости принадлежитъ $2r^4$ прямыхъ. Если зада-
димся прямою, то плоскости u огибаютъ поверхность $4(m-1)^3 n$ класса,
а принадлежащія всѣмъ такимъ сочетаніямъ: (данная прямая, касат-
ельная къ этой поверхности) особенныя точки соотвѣствующихъ X_{pu} по-
крываютъ поверхность порядка $4(m-1)^3 n$.

Если и всѣ вторыя производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ обращаются въ нуль, а
производныя 3-го порядка въ 0 не обращаются, имѣемъ высшую особен-
ность—касательныя къ такой точкѣ x къ X_{pu} огибаютъ конусъ 3-го по-
рядка,—такихъ элементовъ коннекса (m, r, n) , заданный общимъ урав-
неніемъ, содержитъ $13440(m-2)^3 r^4 n^3$.

2. Аналогично можно установить понятіе объ элементахъ, особен-
ныхъ по отношенію плоскости—*плоскостныхъ особенныхъ элементахъ*.
Такое наименованіе будемъ придавать тѣмъ элементамъ (x, p, u) , ко-
торыхъ плоскость u есть особенная касательная поверхности U_{xp} , при-
надлежащей сочетанію (x, p) въ коннексѣ (1). Плоскости эти при дан-
ныхъ (x, p) опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial f(xpu)}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_4} = 0 \quad (6)$$

которые вообще говоря совмѣстными при данныхъ (x, p) не будутъ.

Но предполагая, что x и p могутъ принимать всевозможныя зна-
ченія, получимъ: *плоскостные особенные элементы коннекса* (m, r, n)
образуютъ тройную коинциденцію съ характеристиками

$$\begin{aligned} &4m^3 r, \quad 4m^3 (n-1), \quad 6m^2 r^2, \quad 12m^2 r (n-1), \quad 6m^2 (n-1)^2, \\ &4mr^3, \quad 12mr^2 (n-1), \quad 12mr (n-1)^2, \quad 4m (n-1)^3, \quad r^4, \\ &4r^3 (n-1), \quad 6r^2 (n-1)^2, \quad 4r (n-1)^3, \end{aligned} \quad (7)$$

значеніе которыхъ аналогично вышеприведеннымъ.

Для такихъ элементовъ уравненіе точки прикосновенія u и U_{xp}

$$\sum U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \quad (8)$$

обращается тождественно въ нуль, и точки прикосновенія образуютъ въ плоскости u кривую 2-го класса

$$\sum U_i U_k \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \quad (9)$$

потому что при выполненіи (6) опредѣлитель уравненія (9) обращается въ нуль:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \right| = 0. \quad (10)$$

Мы предположили при этомъ, что не всѣ производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ обращаются въ нуль.

Если же всѣ эти производныя обращаются въ 0, имѣемъ высшую особенность. Такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n) , котораго коэффициенты не связаны никакими добавочными соотношеніями содержитъ конечное число $13440 m^3 r^4 (n-2)^3$.

При этомъ конечно предполагаемъ, что всѣ производныя 3-го порядка по x одновременно въ 0 не обращаются,—что и будетъ имѣть мѣсто для коннекса, заданнаго общимъ уравненіемъ.

3. Прежде чѣмъ говорить объ элементахъ коннекса (x, p, u) , представляющихъ особенность относительно прямой, укажемъ на обстоятельство, которое встрѣчается и въ другихъ коннексахъ, именно на роль основныхъ сочетаній по отношенію къ точечнымъ и плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.

Пусть (p, u) есть основное сочетаніе коннекса (m, r, n)

$$f(x, p, u) = 0. \quad (1)$$

Тогда согласно самому опредѣленію основныхъ сочетаній при замѣнѣ x_i черезъ $x_i + \varepsilon x'_i$ (гдѣ x'_i —координаты какой нибудь совершенно произвольной точки) уравненіе также должно удовлетворяться при (p, u) —основномъ сочетаніи.

Итакъ при этомъ не только (1) выполнено, но и

$$f(x + \varepsilon x', p, u) = 0$$

или

$$f(x, p, u) + \varepsilon \sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \sum_2 = 0.$$

Отбрасывая въ силу (1) 1-й членъ, раздѣляя на ϵ и переходя къ предѣлу $\epsilon = 0$ получимъ: если (p, u) основное сочетаніе, то при совершенно произвольныхъ x'_i имѣемъ

$$\sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

а для этого необходимо должны обращаться въ нуль производныя, т. е. уравненія (3) выполнены. Итакъ: если коннексъ (1) имѣетъ основное сочетаніе (p, u) , то это сочетаніе въ соединеніи съ каждою точкою x пространства образуетъ элементъ удовлетворяющій уравненіямъ (3).

Можно бы поэтому сказать, что каждое основное сочетаніе (p, u) даетъ начало ∞^3 точечно-особенныхъ элементовъ, но въ этомъ, — какъ уже приходилось говорить въ другомъ мѣстѣ ¹⁾, — является нѣкоторая натянутость: для основного сочетанія (p, u) уравненіе (1) удовлетворяется независимо отъ значеній x , уравненіе X_{pu} есть $0 = 0$.

Совершенно подобнымъ образомъ покажемъ, что каждому основному сочетанію коннекса (1) соответствуетъ ∞^3 элементовъ (x, p, u) , выполняющихъ уравненія (6).

Поэтому въ дальнѣйшемъ прибѣгнемъ къ другому опредѣленію особенныхъ элементовъ. но предварительно закончимъ разборъ типовъ особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u) .

4. Линейчатыми особенными элементами можно называть, — аналогично предыдущему, — тѣ элементы коннекса, которыхъ прямая есть особенная прямая коннекса K_{xu} принадлежащаго сочетанію (x, u) элемента.

Но при этомъ необходимо условиться относительно того, что называть особенными прямыми комплекса.

Koenigs ²⁾, слѣдуя Пашу, называетъ *особенными* прямыми комплекса $F = 0$ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial p} \right) = \frac{\partial F}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{23}} = 0. \quad (11)$$

Въ коннексѣ (m, r, n) элементовъ, которыхъ прямая выполняютъ уравненіе (11), имѣется коинциденція, которой характеристики:

$$\alpha_{200} = 2m^2, \quad \alpha_{110} = 2m(2r - 1), \quad \alpha_{101} = 4mn, \quad \alpha_{020} = 2r(r - 1), \\ \alpha_{110} = 2n(2r - 1), \quad \alpha_{002} = 2n^2.$$

¹⁾ Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса § 1. Изв. Каз. Физ. Мат. Общ. 1902 г.

²⁾ La géométrie réglée et ses applications, p. 77.

Въ послѣдующемъ намъ придется еще встрѣтиться съ этою коинциденціею. Замѣтимъ здѣсь, что пучекъ касательныхъ комплексовъ

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} P_{ik} + \lambda \sum \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = 0 \quad (12)$$

состоитъ для подобной прямой весь изъ специальныхъ комплексовъ, и всѣ оси этихъ комплексовъ образуютъ плоскій пучекъ.

Казалось бы однако болѣе правильнымъ давать подобнымъ прямымъ иное наименованіе, напримѣръ *спеціальныхъ*, сохраняя названіе особенныхъ прямыхъ для тѣхъ, свойства которыхъ имѣютъ большее сходство со свойствами особенныхъ точекъ кривыхъ линий и поверхностей.

Если линейчатое пространство изобразимъ въ плоскомъ пространствѣ пяти измѣреній квадратичнымъ M_4 , то комплексъ p -го ранга выдѣлится изъ этого M_4 уравненіемъ p -ой степени между 5-ью координатами точки (или между 6-ью однородными), т. е. изобразится M_3 —пересѣченіемъ двухъ M_4 . Особенною точкою такого M_3 будетъ такая точка, въ которой два M_4 между собою касаются, и слѣдовательно, производныя ихъ уравненій по координатамъ пропорціональны.

Соотвѣтственно этому можемъ называть *особенною* прямою комплекса такую его прямую, которая выполняетъ шесть уравненій

$$\lambda' \frac{\partial F(p)}{\partial p_{ik}} + \mu' \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ik}} = 0. \quad (ik=1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

Для такой прямой уравненіе пучка линейныхъ комплексовъ (12) приводится къ виду

$$\frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'} \right) \sum \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'} \right) (p, p) = 0$$

т. е. сводится къ одному только специальному линейному комплексу, образуемому прямыми встрѣчающими „прямую прикосновенія“ p .

Уравненій (13) по исключеніи λ'/μ' пять, уравненіе комплекса въ силу (13) есть слѣдствіе основнаго уравненія $\frac{1}{2} (p, p) = 0$, слѣдовательно, такихъ особенныхъ прямыхъ комплексъ вообще не содержитъ а для существованія ихъ необходимо одно соотношеніе между коэффициентами.

Другое свойство этихъ особенныхъ прямыхъ заключается въ слѣдующемъ. Линейные комплексы, содержащіе данную прямую p комплекса и находящіеся въ инволюціи съ каждымъ изъ касательныхъ по этой

прямой линейных комплексовъ, образуютъ M_3 —они опредѣляются уравненіями

$$(c, p) = 0, \quad \sum e_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = 0.$$

Но для особенной прямой два эти уравненія сводятся къ одному, и линейные комплексы указаннаго свойства образуютъ уже M_4 .

Для специальной же прямой (особенной по Koenigs'у) линейные комплексы эти образуютъ M_3 комплексовъ, содержащихъ двѣ данныхъ прямыхъ.

Очевидно, что каждая прямая, особенная въ указанномъ здѣсь смыслѣ, будетъ особенною и для Koenigs'a, т. е. будетъ также и специальною, но не обратно.

Принимая такое опредѣленіе особенныхъ прямыхъ можемъ ввести теперь понятіе о линейчатыхъ особенныхъ элементахъ коннекса (x, p, u) .

Эти элементы опредѣляются слѣдовательно, уравненіями

$$\frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}}} = \frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}}} = \frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}}} = \frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}}} = \frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}}} = \frac{\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}}} \quad (14)$$

которые могутъ быть замѣнены напримѣръ, такими

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}} &= 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}} &= 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} &= 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} &= 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Къ уравненіямъ (14) должно быть конечно присоединено еще основное уравненіе $(p, p) = 0$, и тогда уравненіе самого коннекса есть слѣдствіе уравненій (14) и основного уравненія.

Чтобы определить характеристики этой четверной коинциденции линейчатых особенных элементов замѣтимъ, что переходъ отъ системы (14) къ системѣ (15) сопровождается введеніемъ излишнихъ рѣшеній, определяемыхъ системами

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}} = 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} = 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}} = 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

и еще тремя такими системами, въ которыхъ фигурируютъ послѣдовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} = 0 \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}} = 0 \quad \text{и 3 уравненія изъ системы (15)} \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} = 0 \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} = 0 \quad " \quad " \quad " \quad " \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} = 0 \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} = 0 \quad " \quad " \quad " \quad " \end{aligned}$$

Но исключая эти системы мы дважды исключаемъ такіа системы

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} = 0, \quad \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} = 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} - \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}} \cdot \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} = 0, \\ 2) \quad \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} = 0, \quad \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}} = 0, \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}} - \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}} = 0. \end{aligned}$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ значеніямъ характеристикъ четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ коннекса (m, r, n) :

$$\begin{aligned} \delta_{320} &= m^3(10r^2 - 16r + 7), \quad \delta_{311} = 4m^3n(5r - 4), \quad \delta_{302} = 10m^3n^2, \\ \delta_{230} &= m^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{221} = 3m^2n(10r^2 - 16r + 7), \\ \delta_{212} &= 6m^2n^2(5r - 4), \quad \delta_{203} = 10m^2n^3, \\ \delta_{140} &= m(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3), \\ \delta_{131} &= 2mn(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{122} = 3mn^2(10r^2 - 16r + 7), \\ \delta_{113} &= 4mn^3(5r - 4), \quad \delta_{041} = n(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3), \\ \delta_{032} &= n^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{023} = n^3(10r^2 - 16r + 7). \end{aligned}$$

Не трудно убѣдиться, что уравненія (14) выполняются элементомъ (x, p, u) , если (x, u) есть основное сочетаніе, а p — какая угодно прямая пространства.

Дѣйствительно, уравненіе коннекса, которое можно писать

$$f(xru) + f_1(xru)(p, p) = 0 \quad (1')$$

[гдѣ $f_1(xru) = 0$ совершенно произвольный, коннекса $(m, r - 2, n)$], должно при подстановкѣ вмѣсто x, u координатъ основного сочетанія удовлетворяться не только координатами произвольной прямой p , но и бесконечно близкой къ ней $p + \epsilon p'$ (гдѣ $p + \epsilon p'$ — также нѣкоторая прямая), т. е. должны имѣть

$$f(x, p + \epsilon p', u) + f_1(x, p + \epsilon p', u)(p + \epsilon p', p + \epsilon p') = 0.$$

Разлагая по степенямъ ϵ , отбрасывая члены отъ ϵ независящіе въ силу (1'), раздѣляя на ϵ и переходя къ предѣлу $\epsilon = 0$, получимъ, что при произвольныхъ p'_{ik} должно быть

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial f(xru)}{\partial p_{ik}} + (p, p) \sum p'_{ik} \frac{\partial f_1(xru)}{\partial p_{ik}} + f_1(xru) \cdot (p, p') = 0.$$

Второй членъ выпадаетъ въ силу $(p, p) = 0$ и остается уравненіе

$$\sum p'_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}} \right) = 0,$$

которое при совершенно произвольных p' (ограниченных только условием $p + \varepsilon p' - \text{прямая}$) ведет за собою уравнения (14). Но хотя эти уравнения и выполнены, считать всякую прямую p особенною прямою комплекса, принадлежащего основному сочетанию, является нѣкоторою натяжкою въ томъ отношеніи, что самый комплекс имѣетъ уравненіе $0 = 0$ и является совокупностью всѣхъ прямыхъ пространства.

5. Указанными типами особенныхъ элементовъ еще далеко не исчерпываются возможные ихъ типы. Прежде всего элементъ (x, p, u) можетъ одновременно удовлетворять двумъ изъ трехъ системъ (3), (6) и (14).

Если элементъ (x, p, u) выполняетъ уравненія (3) и (6), т. е. точка его есть особенная точка поверхности X_{pu} и плоскость—особенная касательная поверхности U_{xp} , то можно такой элементъ называть *точечно-плоскостнымъ особеннымъ* элементомъ. Подобныхъ элементовъ коннексъ (1) имѣетъ вообще ∞^3 , потому что изъ восьми уравненій (3) и (6) независимы только семь въ силу тождества

$$m f(x, p, u) = n \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m \sum u_k \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0.$$

Отсюда замѣняя $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ черезъ $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0$ также черезъ $f = 0$ вводимъ излишнія рѣшенія: отъ шестерной коинциденціи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad f = 0$$

должны быть отброшены:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad x_4 = 0 \quad (17)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 5), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad u_4 = 0. \quad (18)$$

Отсюда и можемъ найти характеристики шестерной коинциденціи *точечно-плоскостныхъ* особенныхъ элементовъ:

$$\lambda_{340} = (35m^3 - 60m^2 + 30m - 4)r^4, \quad \lambda_{043} = (35n^3 - 60n^2 + 30n - 4)r^4.$$

$$\lambda_{331} = r^3 [3n \{m^3 + 9m^2(m-1) + 9m(m-1)^2 + (m-1)^3\} + \\ + (n-1) \{m^3 + 27m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 13(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{133} = r^3 [3m \{n^3 + 9n^2(n-1) + 9n(n-1)^2 + (n-1)^3\} + \\ + (m-1) \{n^3 + 27n^2(n-1) + 45n(n-1)^2 + 13(n-1)^3\}].$$

$$\lambda_{241} = 3r^4 [3n\{m^2 + 3m(m-1) + (m-1)^2\} + \\ + (n-1)\{2m^2 + 11m(m-1) + 7(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{142} = 3r^4 [3m\{n^2 + 3n(n-1) + (n-1)^2\} + \\ + (m-1)\{2n^2 + 11n(n-1) + 7(n-1)^2\}].$$

$$\lambda_{232} = 3r^3 [n^2\{3m^2 + 6m(m-1) + (m-1)^2\} + \\ + n(n-1)\{6m^2 + 24m(m-1) + 10(m-1)^2\} + \\ + (n-1)^2\{m^2 + 10m(m-1) + 9(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{313} = r[n^3\{m^3 + m^2(m-1)\} + n^2(n-1)\{3m^3 + 27m^2(m-1) + 18m(m-1)^2\} + \\ + n(n-1)^2\{18m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 9(m-1)^3\} + \\ + (n-1)^3\{9m(m-1)^2 + 7(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{322} = 3r^2 [n^2\{m^3 + 6m^2(m-1) + 3m(m-1)^2\} + \\ + n(n-1)\{m^3 + 15m^2(m-1) + 21m(m-1)^2 + 3(m-1)^3\} + \\ + (n-1)^2\{3m^2(m-1) + 12m(m-1)^2 + 5(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{223} = 3r^2 [m^2\{n^3 + 6n^2(n-1) + 3n(n-1)^2\} + \\ + m(m-1)\{n^3 + 15n^2(n-1) + 21n(n-1)^2 + 3(n-1)^3\} + \\ + (m-1)^2\{3n^2(n-1) + 12n(n-1)^2 + 5(n-1)^3\}].$$

Подобнымъ образомъ элементы, которые суть точечные особенные и линейчатые особенные, должны выполнять 4 уравненія (3) и 5 уравненій (14). Но эти девять уравненій опредѣляютъ не восьмерную, а семерную коинциденцію, потому что можемъ писать тождество

$$r \sum x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + (p, p) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right) = m \sum p_{ji} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + (p, p) \frac{\partial f_1}{\partial p_{ji}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ji}} \right)$$

или

$$r \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m \sum p_{ji} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ji}} \right).$$

Для линейчатыхъ особенныхъ элементовъ правая часть сводится къ виду

$$m(f_1 - \lambda/\mu)(p, p) = 0.$$

Слѣдовательно, въ силу уравненій (14) имѣемъ уже $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, и такимъ образомъ изъ 4 уравненій (3) можемъ удержать только три.

Подобнымъ образомъ семерную коинциденцію образуютъ *линейчатоплоскостные* особенные элементы, для которыхъ одновременно должны быть выполнены девять уравненій (6) и (14), сводящихся къ восьми независимымъ.

Если наконецъ (x, p, u) выполняетъ всѣ три системы уравненій одновременно т. е. будетъ и точечнымъ особеннымъ, и плоскостнымъ особеннымъ и въ тоже время линейчатымъ особеннымъ элементомъ, то онъ долженъ выполнять тринадцать уравненій, изъ которыхъ два суть слѣдствія остальныхъ. Поэтому коннексъ (1) подобныхъ элементовъ вообще не имѣетъ, и для существованія ихъ между коэффициентами уравненія (1) должно существовать соотношеніе.

Поэтому можно подобные элементы называть *собственно-особенными элементами* коннекса, въ противоположность вышеперечисленнымъ типамъ особенныхъ элементовъ, которые присущи каждому коннексу.

Собственныхъ особенныхъ элементовъ коннексъ при извѣстныхъ условіяхъ можетъ имѣть не только конечное, но и бесконечно большое число, многообразіе ихъ можетъ составлять даже простую коинциденцію, какъ въ поверхностяхъ могутъ быть двойныя кривыя.

Вышеуказанныхъ особенныхъ (точечныхъ и т. д.) элементовъ коннексъ можетъ также содержать болѣе высокое, чѣмъ въ общемъ случаѣ многообразіе, и тогда они не будутъ уже обыкновенными особенностями.

6. Послѣ приведеннаго выше разбора особенныхъ элементовъ коннекса мы можемъ пополнить сказанное въ § I объ основныхъ точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ.

Основная точка, если она въ коннексѣ существуетъ, принадлежитъ всѣмъ ∞^7 поверхностямъ X_{pi} коннекса. Изъ нихъ на ∞^4 поверхностяхъ она будетъ особою, — на тѣхъ именно, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (p, u) , выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial x_i} \right)_{x=x_{осн.}} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

Такимъ образомъ каждая основная точка даетъ начало ∞^4 точечнымъ особеннымъ элементамъ.

Можетъ однако случиться, что уравненія (19) удовлетворяются независимо отъ значеній p и u .

Тогда такая основная точка представитъ высшую особенность и мы можемъ назвать ее *особенною основною точкою*. Она даетъ начало ∞^7

точечнымъ особеннымъ элементамъ. Переходною стадіей являются случаи, когда (19) имѣютъ ∞^5 или ∞^6 общихъ сочетаній (p, u) .

Примѣръ такой особенной точки представлятъ коннексы вида

$$f(xru) = \varphi(xru) \sum a_{ik} x_i x_k + \varphi_1(xru) \sum a'_{ik} x_i x_k + \\ + \varphi_2(xru) \sum a''_{ik} x_i x_k = 0,$$

если знакъ суммъ распространяется на значенія $i, k = 1, 2, 3$. Тогда при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ обращаются въ нуль независимо отъ значеній p и u не только f , но и всѣ ея производныя по x ; здѣсь $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ означаютъ совершенно произвольные коннексы $(m - 2, r, u)$.

Подобнымъ образомъ основная плоскость касается всѣхъ ∞^7 поверхностей U_{xp} коннекса, и будетъ особенно касательною для тѣхъ ∞^4 изъ нихъ, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (x, p) , выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial u_k} \right)_{u=u_{\text{осн.}}} = 0. \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

Такимъ образомъ каждая основная плоскость даетъ начало ∞^4 плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.

Но можетъ случиться, что уравненія (13) сводятся къ двумъ или одному независимому уравненію и стало быть опредѣляютъ ∞^5 или ∞^6 сочетаній (x, p) . Наконецъ возможны случаи, когда уравненія (13) выполняются тождественно, и слѣдовательно плоскость будетъ особенною касательною ко всѣмъ ∞^7 поверхностямъ U_{xp} коннекса. Въ послѣднемъ случаѣ называемъ ее *особенною основною плоскостью* коннекса.

То же самое можно замѣтить и относительно основныхъ прямыхъ. Основная прямая принадлежитъ всѣмъ ∞^6 комплексамъ P_{xu} коннекса. Она будетъ особенною прямою въ тѣхъ изъ нихъ, которые принадлежатъ сочетаніямъ (x, u) , опредѣляемымъ уравненіями:

$$\lambda \left(\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ji}} \right)_{p=p'_{\text{осн.}}} + \mu \left(\frac{\partial f(xru)}{\partial p_{ji}} \right)_{p=p'_{\text{осн.}}} = 0. \quad (ji=1, 2, 3, 4) \quad (21)$$

Каждая основная прямая ведетъ за собою ∞^1 линейчатыхъ особенныхъ элементовъ.

Можетъ случиться однако, что шесть уравненій сводятся къ меньшему числу независимыхъ или даже сводятся къ одному, опредѣляющему значеніе λ/μ . Въ послѣднемъ случаѣ основная прямая будетъ особенною прямою во всѣхъ ∞^6 комплексахъ P_{xu} и мы придадимъ ей тогда наименованіе *особенной основной прямой* коннекса (1).

Мы можем даѣе говорить объ *особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ* (x, u) , (x, p) , (p, u) .

Пусть (x^0, u^0) есть основное сочетаніе коннекса (1). Тогда всѣ коннексы $K_p(x, u)$, принадлежащіе всѣмъ прямымъ пространства, содержатъ элементъ (x^0, u^0) . Это сочетаніе для нѣкоторыхъ изъ нихъ можетъ быть собственно *особеннымъ элементомъ*,—если при извѣстныхъ значеніяхъ p выполняются уравненія.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

Если же эти уравненія выполняются сочетаніемъ (x^0, u^0) при всякихъ значеніяхъ p , то мы назовемъ (x^0, u^0) *особеннымъ основнымъ сочетаніемъ*.

Такимъ же образомъ придемъ къ понятію объ *особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ* (x, p) и (p, u) .

7. Въ предыдущемъ были указаны недостатки даннаго опредѣленія *особенныхъ элементовъ* коннекса (x, p, u) ,—оно только съ натяжкой примѣнимо къ тѣмъ *особеннымъ элементамъ*, въ составъ которыхъ входитъ какое либо основное сочетаніе коннекса.

Можно избѣжать этого, если разсматривать не поверхность принадлежащую сочетанію (p, u) и т. д., какъ мы это дѣлали выше, а на примѣръ коннексъ $K_p(x, u)$, принадлежащій прямой p въ коннексѣ (1). Тогда точечными *особенными элементами* коннекса (1) назовемъ тѣ, коихъ сочетаніе (x, u) есть точечный *особенный элементъ* $K_p(x, u)$, плоскостными *особенными тѣ*, коихъ сочетаніе (x, u) есть плоскостной *особенный элементъ* того же коннекса $K_p(x, u)$, и *точечно-плоскостными особенными элементами* (1)—тѣ, коихъ сочетаніе (x, u) есть *собственно-особенный элементъ* коннекса $K_p(x, u)$.

Предполагая, что опредѣленіе *особенныхъ элементовъ* для коннекса съ элементомъ (точка, плоскость) достаточно выяснено, придемъ къ опредѣленію вышеуказанныхъ типовъ *особенныхъ элементовъ* (1). Обращаясь къ особенностямъ коннексовъ $K_u(x, p)$ и $K_x(p, u)$, получимъ представленіе и объ остальныхъ типахъ особенностей коннекса (x, p, u) .

Недостатки такого опредѣленія: 1^о для коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая) и (прямая, плоскость) понятіе *особеннаго элемента* еще недостаточно выяснено, и надо было бы предварительно остановиться на этомъ вопросѣ, не относящемся непосредственно къ предмету настоящей статьи; 2^о хотя мы и избѣжимъ, держась этого опредѣленія, неудобствъ, вызываемыхъ при первомъ опредѣленіи основными сочетаніями, но основныя точки, прямыя и плоскости приводятъ къ тѣмъ же затрудненіямъ: уравненія соотвѣствующихъ имъ коннексовъ приводятся къ виду $0 = 0$.

Связывать подобно Клебну понятіе объ особенныхъ элементахъ съ понятіемъ о сопряженномъ коннексѣ нельзя потому, что, какъ уже было это мною указано въ другомъ мѣстѣ ¹⁾, сопряженного коннекса для рассматриваемыхъ конфигурацій не существуетъ.

8. Соприкасающійся трилинейный коннексъ. Какъ для коннекса съ элементомъ (точки, плоскость) при опредѣленіи особенныхъ элементовъ въ основу можно положить соприкасающійся билинейный коннексъ,—т. е. рядомъ съ уравненіемъ $f(x, u) = 0$ такого коннекса рассматривать уравненіе

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k = 0,$$

можно и для коннексовъ (x, p, u) ввести аналогичный, но уже трилинейный коннексъ. Но такъ какъ уравненіе коннекса (x, p, u) можетъ быть изображено въ различныхъ видахъ

$$f(xru) + f_1(xru)(p, p) = 0,$$

смотря по выбору коннекса $f_1 = (m, r-2, n)$, то и за сопряженный трилинейный коннексъ мы не можемъ принять прямо

$$\sum \frac{\partial^3 f(xru)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} = 0,$$

но должны рассматривать цѣлую систему ∞^{10} трилинейныхъ коннексовъ

$$\sum_{i,k,jl} \frac{\partial^3 f(x, p, u)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f_1(xru)}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k (p, P) = 0. \quad (22)$$

Это обстоятельство, конечно, нѣсколько усложняетъ примѣненіе соприкасающагося трилинейнаго коннекса для изученія коннекса. Но для установленія понятія объ особенныхъ элементахъ онъ оказывается пригоднымъ.

Элементъ (x, p, u) , для котораго составленъ соприкасающійся коннексъ, и который можно назвать элементомъ прикосновенія, принадлежитъ соприкасающемуся коннексу, такъ какъ подстановка $X = x, U = u, P = p$ даетъ

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} X_i P_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} (p, p) = \\ & = m r n f(xru) + m n f_1(xru) \cdot (p, p) = 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. „Изв. Каз. Ф.-М. О.“ (2) 1902. Въ § V я останавливаюсь на этомъ подробнѣе.

При этомъ сочетаніе (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося коннекса (независимо отъ f_1), если его уравненіе выполняется независимо отъ значеній X .

Но подстановка $P=p, U=u$ въ уравненіе (22) даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} p_{ji} u_k \cdot X_i + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} X_i u_k \cdot (p, p) = 0$$

или

$$rn \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + n(p, p) \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} X_i = 0$$

и наконецъ, въ силу $(p, p) = 0$,

$$rn \sum_i \frac{\partial f(xpi)}{\partial x_i} X_i = 0.$$

Итакъ сочетаніе (p, u) элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса, если (x, p, u) выполняетъ условія

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

т. е. когда по предыдущему элементъ будетъ точечнымъ особеннымъ элементомъ коннекса (1).

Мы и можемъ опредѣлить точечный особенный элементъ тѣмъ именно свойствомъ, что его сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Точно также нетрудно убѣдиться, что плоскостной особенный элементъ коннекса таковъ, что его сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса. Дѣйствительно, подстановка $X=x, P=p$ въ уравненіе (28) соприкасающагося коннекса доставитъ

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{ji} \partial u_k} x_i p_{ji} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} x_i U_k \cdot (p, p) \\ &= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + m \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k (p, p) \\ &= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0. \end{aligned}$$

Уравнение это удовлетворяется независимо отъ значений U , если выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0. \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

Наконецъ, если выполнены уравненія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + \mu \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ji}} = 0, \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

то изъ всей совокупности ∞^{16} различныхъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ для ∞^{16} сочетаніе (x, u) элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ, и съ другой стороны всѣ остальные соприкасающія коннексы сводятся для того же сочетанія къ одной и той же совокупности прямыхъ, встрѣчающихъ прямую p элемента прикосновенія.

Дѣйствительно, подставимъ въ уравненіе (22) соприкасающагося трилинейнаго коннекса $X=x$, $U=u$. Получимъ:

$$mn \sum_{ji} \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} P_{ji} + mn f_1 \cdot (p, P) = 0,$$

или

$$mn \sum_{ji} P_{ji} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ji}} \right) = 0.$$

Для того чтобы сочетаніе (x, u) было основнымъ, коэффициенты при 6-и координатахъ P_{ji} должны быть равны нулю, т. е. должно быть

$$-\frac{1}{2} f_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{12}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{13}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{14}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{34}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{34}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{42}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p_{23}}}{\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}}}.$$

Такимъ образомъ если уравненія (13) выполнены, то равны и эти шесть отношеній. Но отсюда при данныхъ x, p, u получаемъ значеніе которое должно имѣть $f_1(x, p, u)$, т. е. опредѣляется одна изъ 16 величинъ $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k}$, которыя являются параметрами въ уравненіи соприкасающагося коннекса и произвольныхъ остается только 15.

Если же значеніе шести отношеній (его означимъ λ/μ) не равно $-\frac{1}{2} f_1$, то уравненіе коннексовъ сводится къ

$$mn \left(\lambda/\mu + \frac{1}{2} f_1 \right) \cdot (p, P) = 0,$$

т. е. къ

$$(p, P) = 0.$$

Если напротивъ уравненія, которыми въ $n^0 4$ этого §-а мы опредѣлили линейчатые особенные элементы коннекса (1), невыполнены, то (x, u) не будетъ основнымъ сочетаніемъ ни на одномъ изъ ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ, которые мы объединяемъ подъ именемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Можно поэтому дать такое опредѣленіе: *линейчатые особенные элементы суть тѣ элементы коннекса, для которыхъ изъ общей совокупности ∞^{16} соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ выделяется группа въ ∞^{15} такихъ коннексовъ, имѣющихъ сочетаніе (x, u) элементи своимъ основнымъ сочетаніемъ, а остальные сводятся къ комплексу $(p, P) = 0$.*

Можно формулировать отношеніе особенныхъ элементовъ къ соприкасающемуся коннексу нѣсколько иначе.

Весь „лучекъ“ соприкасающихся коннексовъ опирается на коинциденцію

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} = 0, \quad (p, P) = 0 \quad (23)$$

и элементы этой коинциденціи принадлежать каждому изъ ∞^{16} коннексовъ (22).

Въ ней прямая p есть основная прямая, и потому всякое сочетаніе (X, p) и (p, U) есть основное сочетаніе ея.

Напротивъ, ни точка x , ни плоскость u не будутъ основными точками, и сочетаніе (x, u) основнымъ сочетаніемъ коинциденціи вообще не будетъ.

Поэтому относительно сочетаній (x, p) и (p, u) элемента прикосновенія можно поставить вопросъ, когда они будутъ основными сочетаніями не только для коинциденціи, но и для всѣхъ ∞^{16} соприкасающихся коннексовъ. Это и приводитъ къ полученному уже выше результату.

1. Сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе каждою изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если ими выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) назовемъ точечнымъ особеннымъ.

2. Сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе каждою изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если имъ выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0; \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) называемъ *плоскостнымъ особеннымъ*.

3. Сочетаніе (x, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ *коинциденціи*, на которую опираются все соприкасающіеся коннексы, если выполнены уравненія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + \mu \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ji}} = 0, \quad (j, l = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) называемъ *линейчатымъ особеннымъ*.

§ IV.

Особенные элементы коинциденціи (простой).

1. Ограничимся случаемъ коинциденціи, заданной пересѣченіемъ двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n') :

$$f(x, p, u) = 0, \quad F(x, p, u) = 0. \quad (1)$$

Если f и F различныхъ степеней относительно переменныхъ, то можно назвать все же „пучкомъ“ коннексовъ фигуру опредѣляемую уравненіемъ

$$\lambda f(xpu) + \mu F(xpu) = 0 \quad (2)$$

при λ и μ постоянныхъ ¹⁾, такое опредѣленіе соответствуетъ геометрическому смыслу совокупности коннексовъ, опирающихся на данную коинциденцію, но требуетъ соединенія въ одно уравненіе двухъ формъ различныхъ степеней. Примемъ поэтому, что λ и μ суть однородныя функціи x, p, u степеней $m_0 - m, r_0 - r, n_0 - n$ и $m'_0 - m', r'_0 - r', n'_0 - n'$, гдѣ m_0, r_0, n_0 наибольшія изъ паръ чиселъ: m и m', r и r', n и n' . Однако при произвольныхъ коэффициентахъ въ λ и въ μ и при всевозможныхъ значеніяхъ x_i и u_i , отношеніе λ/μ можетъ имѣть только ∞^1 значеній.

Всѣ эти коннексы имѣютъ при произвольныхъ коэффициентахъ въ λ и μ общими элементы коинциденціи (1).

Точечные особенные элементы этой совокупности коннексовъ опредѣляются уравненіями

$$V = \frac{\partial(\lambda f + \mu F)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + F \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \quad (3)$$

($i = 1, 2, 3, 4$)

¹⁾ Срв., напримѣръ, Study, Methoden zur Theorie der ternärer Formen по отношенію къ тернарнымъ коннексамъ.

Будемъ разыскивать тѣ особенные элементы, которые являются таковыми на всѣхъ коннексахъ (2), т. е. принадлежатъ коинциденціи (1). Для такихъ элементовъ уравненія (3) приводятся съ помощію (1) къ виду

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

какъ если бы λ и μ были постоянныя, и даютъ слѣдовательно

$$\frac{F'_{x_1}}{f'_{x_1}} = \frac{F'_{x_2}}{f'_{x_2}} = \frac{F'_{x_3}}{f'_{x_3}} = \frac{F'_{x_4}}{f'_{x_4}}. \quad (4')$$

Уравненія эти показываютъ, что x должно быть или особенною точкою на одной изъ поверхностей X_{pu} , X'_{pu} , принадлежащихъ сочетанію (p, u) въ томъ и другомъ коннексахъ, или же точкою касанія этихъ поверхностей, т. е. эта точка должна быть особенною точкою кривой, принадлежащей сочетанію (p, u) въ коинциденціи (1).

Здѣсь однако также является то затрудненіе, что сочетаніе (p, u) можетъ быть основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, для котораго двѣ поверхности X_{pu} и X'_{pu} совпадаютъ вполнѣ или отчасти и уравненія (4') выполняются всѣми точками этой общей части. Удобно поэтому и для коинциденціи прибѣгнуть къ соприкасающейся коинциденціи, т. е. разсматривать коинциденцію, определенную такими уравненіями:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} + (p, P) \cdot \sum \frac{\partial^2 f_i(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i \cdot U_k &= 0 \\ \sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} + (p, P) \cdot \sum \frac{\partial^2 F_i(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i \cdot U_k &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта коинциденція, зависящая отъ 30 произвольныхъ параметровъ, опирается на двойную коинциденцію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} = 0, \quad \sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k P_{ji} = 0 \quad (p, P) = 0, \quad (6)$$

которая прямую p имѣетъ основною прямою, а слѣдовательно, каждое сочетаніе, составленное этою прямою съ какою либо точкою или плоскостью, будетъ ея основнымъ сочетаніемъ.

Напротивъ (x, u) будетъ вообще не основнымъ сочетаніемъ.

Поэтому можемъ установить такое опредѣленіе особенныхъ элементовъ коинциденціи (1).

Элементъ (x, p, u) есть точечный особенный элементъ коинциденціи, если его сочетание (p, u) есть основное сочетание для каждой соприкасающейся коинциденціи.

Для этого уравненія (5) при постановкѣ $P=p$, $U=u$ должны сводиться къ одному. Но эта подстановка даетъ

$$m \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0, \quad r'n' \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i = 0.$$

Чтобы два эти уравненія свелись къ одному, должны быть выполнены условія •

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

какъ и выше.

Къ четыремъ уравненіямъ (4) можемъ добавить слѣдующее

$$m\lambda f + m' \cdot \mu \cdot F = 0$$

которое показываетъ, что изъ шести уравненій (1) и (4) независимыхъ только пять, а по исключеніи λ/μ только четыре; такимъ образомъ *точечные особенные элементы коинциденціи (1) образуютъ тройную коинциденцію.*

Въ составъ ея входятъ: 1^о четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $f=0$, принадлежащихъ коннексу $F=0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad F=0,$$

и 2^о четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $F=0$, принадлежащихъ коннексу $f=0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad f=0.$$

Характеристика первой четверной коинциденціи:

$$\mu'_{041} = r^3(rn' + 4nr'); \quad \mu'_{140} = r^3[rm' + 4(m-1)r'];$$

$$\mu'_{032} = 2r^2n(2rn' + 3nr'); \quad \mu'_{131} = 4r^2[m'nr + 3(m-1)nr' + (m-1)n'r];$$

$$\mu'_{230} = 2r^2(m-1)[2m'r + 3(m-1)r']; \quad \mu'_{023} = 2n^2r(2nr' + 3n'r);$$

$$\mu'_{122} = 6nr[m'nr + 2(m-1)nr' + 2(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{221} = 6(m-1)r[2m'nr + 2(m-1)nr' + (m-1)n'r];$$

$$\mu'_{330} = 2(m-1)^2 r[3m'r + (m-1)r'];$$

$$\mu'_{113} = 4n^2[m'nr + (m-1)nr' + 3(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{311} = 4(m-1)^2[(m-1)n'r + (m-1)nr' + 3m'nr];$$

$$\mu'_{212} = 6(m-1)n[2m'nr + (m-1)nr' + 2(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{203} = 2(m-1)n^2[2m'n + 3(m-1)n'];$$

$$\mu'_{302} = 2(m-1)^2 n[3m'n + 2(m-1)n'].$$

Характеристики 2-ой отличаются только обмѣномъ мѣстъ соотвѣтственно m и m' , n и n' , r и r' .

Чтобы опредѣлить характеристики тройной коинциденціи, замѣтимъ, что, взявъ уравненія (1) $f=0$, $F=0$, (4) $\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0$, изъ двухъ первыхъ имѣемъ $\sum x_i f'_{x_i} = 0$ $\sum x_i F'_{x_i} = 0$ или, умножая первые на λ , второе на μ и складывая:

$$\sum x_i (\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0, \quad (7)$$

т. е. одно изъ уравненій (4) есть слѣдствіе 3-хъ остальныхъ и (1).

Но если возьмемъ только пять уравненій

$$f=0, \quad F=0, \quad \lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0, \quad (i=1, 2, 3) \quad (8)$$

то изъ (7) получимъ:

$$x_4 (\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4}) = 0,$$

т. е. уравненія (8) даютъ не только $\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4} = 0$, но еще $x_4 = 0$. Вліяніе этихъ постороннихъ рѣшеній должно быть исключено.

Въ силу $x_4 = 0$ уравненіе (7) приводится къ виду:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x_i (\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0$$

и слѣдовательно между тремя послѣдними уравненіями (8) оказывается линейная связь. Поэтому, добавляя уравненіе $x_4 = 0$, можемъ одно изъ нихъ отбросить, т. е. постороннія рѣшенія опредѣляются уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad \lambda f'_{x_1} + \mu F'_{x_1} = 0, \quad \lambda f'_{x_2} + \mu F'_{x_2} = 0; \quad (9)$$

но при этомъ опять таки ввели излишнія рѣшенія (т. е. ихъ излишне отбросили и слѣдовательно ихъ нужно добавить), опредѣляемые уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad x_3=0, \quad \lambda f'_{x_1} + \mu F'_{x_1}=0. \quad (10)$$

Уравненія (8) замѣнимъ черезъ

$$f=0, \quad F=0, \quad f'_{x_1} F'_{x_1} - f'_{x_2} F'_{x_1}=0, \quad f'_{x_2} F'_{x_2} - f'_{x_3} F'_{x_2}=0 \quad (8')$$

причемъ вводимъ излишнія рѣшенія

$$f=0, \quad F=0, \quad f'_{x_2}=0, \quad F'_{x_2}=0. \quad (8'')$$

Точно также (9) замѣнятся уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad f'_{x_1} F'_{x_1} - f'_{x_2} F'_{x_1}=0 \quad (9')$$

и (10) черезъ

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad x_3=0, \quad (10')$$

потому что послѣднее уравненіе (8) даетъ только значеніе λ/μ .

Отсюда найдемъ искомыя характеристики:

$$\gamma_{310} = (mr' + rm') [(m + m' - 2)^2 + 2] + 2mm' [(m - 2)r + (m' - 2)r'],$$

$$\gamma_{301} = (mn' + nm') [(m + m' - 2)^2 + 2] + 2mm' [(m - 2)n + (m' - 2)n'],$$

$$\gamma_{230} = m'r^2(3m + m' - 4) + rr' [2(m + m' - 2)^2 + m^2 + m'^2 - 2] + \\ + mr'^2(m + 3m' - 2),$$

$$\gamma_{211} = n[2m'r(3m + m' - 4) + r'[2(m + m' - 2)^2 + m^2 + m'^2 - 2]] + \\ + n'[r(2(m + m' - 2)^2 + m^2 + m'^2 - 2) + 2mr'(3m' + m - 4)],$$

$$\gamma_{202} = m'n^2(3m + m' - 4) + nn'[2(m + m' - 2)^2 + m^2 + m'^2 - 2] + \\ + mn'^2(m + 3m' - 2),$$

$$\gamma_{130} = (mr' + rm')(r + r')^2 + 2rr' [(m - 2)r + (m' - 2)r'],$$

$$\gamma_{121} = (mn' + nm')(r + r')^2 + 2(mr' + rm')(n + n')(r + r'),$$

$$\gamma_{112} = (mr' + rm')(n + n')^2 + 2(mn' + nm')(n + n')(r + r'),$$

$$\gamma_{103} = (mn' + nm')(n + n')^2 + 2nn' [(m - 2)n + (m' - 2)n'],$$

$$\gamma_{040} = rr'(r^2 + rr' + r'^2),$$

$$\gamma_{031} = (nr' + rn')(r + r')^2 + 2rr'(nr + n'r'),$$

$$\gamma_{022} = r^2n'(3n + n') + rr'(3n^2 + 4nn' + 3n'^2) + r'^2n(3n' + n),$$

$$\gamma_{013} = (nr' + rn')(n + n')^2 + 2nn'(nr + n'r').$$

2. Плоскостные особенные элементы коинциденции суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе для каждой изъ соприкасающихся коинциденцій.

Сочетаніе (x, p) будетъ основнымъ для всѣхъ коинциденцій, определенныхъ уравненіями (5), если послѣ подстановки $X = x, P = p$ они сводятся къ одному. Но подстановка даетъ

$$mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) \cdot mr \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

$$m'r' \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) \cdot m'r' \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

или

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0, \quad \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k = 0. \quad (11)$$

И такимъ образомъ поставленному условію удовлетворимъ

$$1^\circ \text{ если } \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

$$2^\circ \text{ если } \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

$$3^\circ \text{ если } \lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} + \mu \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0. \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

Первыя уравненія даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $f=0$, принадлежащіе коннексу $F=0$. Они образуютъ четверную коинциденцію.

Вторыя даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $F=0$, принадлежащіе коннексу $f=0$,—они также образуютъ четверную коинциденцію.

Наконецъ третья система уравненій вмѣстѣ съ уравненіями коинциденции даетъ по исключеніи λ/μ четыре независимыхъ уравненія, кото-

рия опредѣляютъ тройную коинциденцію плоскостныхъ особенныхъ элементовъ коинциденціи.

Это будутъ элементы (x, u) , для которыхъ U_{xp} и U'_{xp} касаются и u есть касательная въ общей точкѣ.

Характеристики опредѣлимъ такъ же, какъ для многообразія точечныхъ особенныхъ элементовъ.

Наконецъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (1) суть ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, u) есть основное сочетаніе для двойной коинциденціи (6), на которую отирается многообразіе соприкасающихся коинциденцій (5).*

Для такихъ элементовъ три уравненія

$$(p, P) = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} P_{ji} = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} P_{ji} = 0, \quad (13)$$

къ которымъ при подстановкѣ $X = x$, $U = u$ сводятся уравненія (6), должны сводиться къ двумъ, т. е. должны существовать такія λ , μ , ν , что уравненіе

$$\lambda(p, P) + \mu \sum \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} P_{ji} + \nu \sum \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} P_{ji} = 0 \quad (14)$$

выполняется независимо отъ значеній P_{ji} , и слѣдовательно, для такихъ элементовъ имѣемъ при нѣкоторыхъ λ , μ , ν :

$$\frac{1}{2} \lambda \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{ji}} + \mu \frac{\partial f}{\partial p_{ji}} + \nu \frac{\partial F}{\partial p_{ji}} = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (15)$$

и слѣдовательно должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_{12}} & \frac{\partial f}{\partial p_{13}} & \frac{\partial f}{\partial p_{14}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{12}} & \frac{\partial F}{\partial p_{13}} & \frac{\partial F}{\partial p_{14}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \end{vmatrix} = 0.$$

Это дастъ четыре независимыхъ уравненія, но, прибавляя къ нему два уравненія (1), получаемъ не шесть независимыхъ уравненій, а только пять, потому что умножая шесть уравненій (15) каждое на соответственное p_{ji} и суммируя, получимъ:

$$\lambda(p, p) + \nu \mu f + \nu' \nu F = 0$$

и слѣдовательно, если къ шести уравненіямъ (15) добавимъ два уравненія (1), то изъ шести первыхъ окажется независимыхъ только пять, и изъ нихъ должны быть исключены $\lambda/\sqrt{}$ и $\mu/\sqrt{}$.

Такимъ образомъ, линейчатые особенные элементы коинциденціи (простой) образуютъ четверную коинциденцію.

Характеристики ея опредѣляются подобно тому, какъ находили характеристики тройной коинциденціи, хотя и нѣсколько сложнее. На этомъ я уже не буду останавливаться.

§ V.

Сопряженный коннексъ. Обобщеніе конфигураціи.

1. Подобно сочетанію (точка, плоскость), сочетаніе (точка, прямая, плоскость) является само себѣ двойственнымъ,—поэтому можно было-бы ожидать, что для рассматриваемыхъ коннексовъ долженъ существовать коваріантный сопряженный коннексъ, какъ и для коннексовъ съ элементомъ (точка, плоскость).

На самомъ дѣлѣ оказывается однако, что для рассматриваемыхъ коннексовъ сопряженного коннекса, вообще говоря, не существуетъ.

Возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, p, u) коннекса

$$f(x, p, u) = 0. \quad (1)$$

Сочетанію (p, u) этого элемента,—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ поверхность X_{pu} , на которой и лежитъ точка x элемента. Поверхность X_{pu} имѣетъ въ точкѣ x опредѣленную вообще говоря касательную плоскость, уравненіе которой

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0. \quad (2)$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) въ силу коннекса подчиняется опредѣленная, вообще говоря, плоскость (2), координаты которой

$$\sigma v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

Точно также сочетанію (x, p) того же элемента принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная поверхность U_{xp} , и плоскость u элемента есть одна изъ касательныхъ плоскостей этой поверхности. Точка ея прикосновенія къ U_{xp} опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 \quad (4)$$

и такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется далѣе опредѣленная, вообще говоря, точка, которой координаты опредѣляются помощью уравненій коннекса (1):

$$\varrho \cdot y_k = \frac{\partial f}{\partial u_k} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

До сихъ поръ обращеніе идетъ такъ же, какъ въ тернарномъ коннексѣ и въ коннексѣ съ элементомъ (точка, плоскость).

Но когда возьмемъ сочетаніе (x, u) элемента и будемъ разсматривать соотвѣтственный комплексъ P_{xu} , которому принадлежитъ прямая p элемента, то получится уже нѣчто иное.

Комплексъ P_{xu} имѣетъ для своей прямой p не одинъ касательный линейный комплексъ, а безчисленное множество. Соотвѣтственно этому, если исходить изъ уравненія (1), которое можетъ быть замѣнено любымъ уравненіемъ

$$f(xpu) + \frac{1}{2} f_1(xpu) \cdot (p, p) = 0, \quad (6)$$

уравненіе касательнаго къ P_{xu} комплекса изобразится

$$\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} P_{ik} + f_1 \cdot (p, P) = 0. \quad (7)$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется не прямая, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, потому что при данныхъ x, p, u можно разсматривать $f_1(xpu)$, какъ одинъ произвольный параметръ въ (7).

При этомъ прямая и при томъ одна получится только при условіи

$$\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = \lambda \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}},$$

ибо тогда (7) какъ уже видѣли выше принимаетъ видъ:

$$(\lambda + f_1) (p, P) = 0.$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется одна опредѣленная прямая и при томъ сама прямая элемента, если элементъ будетъ линейчато-особеннымъ.

Далѣе мы получимъ прямую (хотя и не одну, а ∞^1 прямыхъ), если (7) изображаетъ спеціальныи линейный комплексъ, — т. е. если инвариантъ его обращается въ нуль,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial(p, p)}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial(p, p)}{\partial p} \right) = \\
 & = \left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}} + f_1 \cdot p_{34} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}} + f_1 \cdot p_{12} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}} + f_1 \cdot p_{42} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_{42}} + f_1 \cdot p_{13} \right) + \\
 & \quad + \left(\frac{\partial f}{\partial p_{14}} + f_1 \cdot p_{23} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}} + f_1 \cdot p_{14} \right) = \\
 & = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) + f_1 \sum p_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + \frac{1}{2} f_1^2 \cdot (p, p) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) + r f_1 \cdot f + \\
 & \quad + \frac{1}{2} f_1^2 \cdot (p, p) = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial p} \right).
 \end{aligned}$$

Такимъ образомъ касательный комплексъ можетъ быть специальнымъ только въ томъ случаѣ, если прямая p есть специальная прямая комплекса P_{2n} , и тогда всѣ касательные комплексы будутъ специальными. Мы получимъ, какъ совокупность ихъ осей пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи p и прямой q , которой аксиальные координаты суть $\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}$.

Итакъ: элементу (x, p, u) подчиняется пучекъ прямыхъ, если p есть специальная прямая комплекса P_{2n} , т. е. если элементъ (x, p, u) принадлежитъ коинциденціи пересѣченія (1) коннексовъ $(2m, 2r-2, 2n)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0. \quad (8)$$

Какъ уже было упомянуто ранѣе, въ составъ этой коинциденціи входятъ и линейчатые особенные элементы коинциденціи.

Всѣмъ прочимъ элементамъ коннекса принадлежитъ не прямая и не пучекъ прямыхъ, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, содержащихъ прямую элемента и имѣющихъ одинъ и тотъ же параметръ.

Такимъ образомъ для коннексовъ съ элементами (x, p, u) какъ въ томъ случаѣ, если (8) не выполняется тождественно, такъ и въ томъ, когда (8) выполняется тождественно для всякаго элемента коннекса, не существуетъ сопряженнаго коннекса, т. е. такого ковариантнаго коннекса, которой бы состоялъ изъ такихъ же элементовъ, какъ исходный, и элементы котораго находились бы, вообще говоря, въ однозначномъ и однозначно-обратимомъ соотвѣтствіи съ элементами исходнаго.

Тоже самое, очевидно, имѣетъ мѣсто и по тѣмъ же причинамъ для коннексовъ съ элементомъ (x, p) и (p, u) , если бы даже условиться ставить два этихъ типа коннексовъ во взаимную связь.

2. Такое отсутствіе сопряженнаго коннекса заставляетъ остановиться на причинахъ его и попытаться такъ измѣнить введенныя опредѣленія, чтобы возможно было построеніе аналогичной теоріи.

Обратимся прежде всего къ опредѣленію касательныхъ линейныхъ комплексовъ. Если прямую трехмѣрнаго пространства изобразимъ точкою пятимѣрнаго плоскаго многообразія, лежащей на квадратичномъ M_4 , то комплексъ прямыхъ изобразится пересѣченіемъ двухъ M_4 : одного, котораго уравненіе есть уравненіе даннаго комплекса, и другого, упомянутаго выше квадратичнаго многообразія.

Мы имѣемъ такимъ образомъ задачу найти касательное плоское M_3 для трехмѣрнаго же многообразія—пересѣченія двухъ M_4 :

$$f(z) = 0, \quad (\text{соотвѣт. уравненіе комплекса } f(p) = 0) \quad (1)$$

$$\omega(z) = (z, z) = 0 \quad \left(\text{соотв. } \frac{1}{2} (p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \right). \quad (2)$$

Если z означаетъ точку прикосновенія, Z —точку касательнаго M_3 , то уравненія послѣдняго будутъ:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} Z_i = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \omega}{\partial z_i} Z_i = (z, Z) = 0. \quad (3)$$

Вмѣсто этого разсматриваютъ (ср. Koenigs, I. с. стр. 71 и сл.), какъ касательное многообразіе, такое, которое лежитъ также на $\omega(z) = 0$. Поэтому пришлось бы или принимать за касательное многообразіе такое M_2 , которое опредѣляется уравненіями (2) и (3), или же, чтобы имѣть, какъ и въ геометріи точки и плоскости, снова касательное многообразіе 3-хъ измѣреній, взять, какъ это и дѣлается, плоское M_4 , опредѣленное уравненіями (3), но тогда получается не одно касательное многообразіе, а ∞^1 ихъ,—ибо черезъ M_3 , опредѣленное уравненіями (3), можно провести пучекъ плоскихъ M_4 :

$$\lambda \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} Z_i + \mu \sum \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} Z_i = 0. \quad (4)$$

Имѣя за собою достоинство первенства примѣненія, пріемъ этотъ не болѣе естественъ, чѣмъ указанная выше возможность примѣнять не уравненія (2) и (4), а уравненія (2) и (3), т. е. вмѣсто пучка касательныхъ комплексовъ разсматривать касательную конициденцію.

При опредѣленіи линейчато-особенныхъ элементовъ—намъ и пришлось воспользоваться этимъ пріемомъ.

Для примѣненій представилъ бы однако извѣстныя удобства другой пріемъ,—именно разсматривать въ качествѣ касательнаго M_3 именно то, которое опредѣляется уравненіями (3).

При этомъ, конечно, придется выйти изъ геометріи прямой въ тѣсномъ смыслѣ слова и перейти до извѣстной степени въ геометрію линейныхъ комплексовъ. Дѣйств., отбрасывая (2) по отношенію къ Z , мы считаемъ Z не прямою, а линейнымъ комплексомъ и слѣдовательно за плоское касательное къ комплексу (1) M_3 беремъ плоское M_3 линейныхъ комплексовъ, полярныхъ данному и содержащихъ прямую прикосновенія.

Полученное плоское M_3 линейныхъ комплексовъ мы имѣемъ право называть касательнымъ потому, что если возьмемъ прямую $z + dz$ (предположеніе, что $z + dz$ есть прямая даетъ $(z, dz) = 0$) и допустимъ, что эта прямая есть одинъ изъ специальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3 , то она удовлетворитъ уравненію

$$\sum f'_{zi} \cdot (z_i + dz_i) = 0,$$

или въ силу $f(z) = 0$ уравненію

$$\sum f'_{zi} \cdot dz_i = df(z) = 0,$$

и слѣдовательно, подстановка $z + dz$ въ уравненіе комплекса даетъ результатъ 2-го порядка малости, и обратно если прямая z и $z + dz$ принадлежатъ комплексу, то прямая $z + dz$ представляетъ одинъ изъ специальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3 .

3. Примѣненіе вышеприведенныхъ соображеній къ коннексамъ (x, p, u) дастъ вмѣсто соприкасающагося трилинейнаго коннекса такую конфигурацію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpi)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{ji}} X_i U_k C_{ji} = 0 \quad (C, p) = 0$$

гдѣ C_{ji} шесть величинъ, независимыхъ между собою и опредѣляющихъ не прямую, а линейный комплексъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ конфигураціямъ, въ которыхъ элементомъ является уже не комбинація (точка, прямая, плоскость), а соединеніе (точка, линейный комплексъ, плоскость).

Такія конфигураціи можно изучать систематически, какъ это дѣлается по отношенію къ коннексамъ различныхъ типовъ.

Изъ общаго числа ∞^{11} подобныхъ элементовъ одно уравненіе выдѣляетъ совокупность ∞^{10} ихъ, которые образуютъ, скажемъ, коннексъ (x, c, u) ; два уравненія выдѣляютъ ∞^9 , образующихъ коинциденцію (x, c, u) и т. д.

Съ этой точки зрѣнія разсматриваемый въ настоящей статьѣ коннексъ является коинциденціей особеннаго типа,—онъ выдѣляется двумя уравненіями

$$f(x, c, u) = 0, \quad (c, c) = 0,$$

изъ которыхъ второе выражаетъ, что беремъ не всевозможные линейные комплексы, а только спеціальныя.

Можно замѣтить, употребляя терминологию аналогичную той, которую примѣняли выше, что эта коинциденція имѣетъ каждый спеціаль- ный линейный комплексъ (каждую прямую) основнымъ, ибо второе урав- неніе имъ выполняется независимо отъ значеній x и u .

Можно дать опредѣленіе особенныхъ элементовъ, какъ коннекса $f(x, c, u) = 0$, такъ этой коинциденціи, причемъ для послѣдней при- демъ къ упомянутой выше соприкасающейся коинциденціи и т. д.

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ подробностяхъ, замѣтимъ только, что коннексы съ элементомъ (точка, линейный комплексъ, плоскость) до- пускаютъ обращеніе, т. е. имѣютъ сопряженный коннексъ. Дѣйствительно каждому элементу (x, c, u) такого коннекса принадлежитъ, вообще го- воря, опредѣленная плоскость (касательная къ X_{cu}): $\sigma v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} (i=1, 2, 3, 4)$, опредѣленная точка (точка прикосновенія плоскости u элемента съ по- верхностью U_{xc}): $\rho y_k = \frac{\partial f}{\partial u_k} (k=1, 2, 3, 4)$.

Наконецъ, составляя полярну $f(x, c, u)$ относительно координатъ комплекса, получимъ:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial c_{ji}} C_{ji} = 0,$$

которое для данныхъ x и u изображаетъ плоское M_5 линейныхъ ком- плексовъ, содержащее комплексъ прикосновенія c и обладающее тѣмъ свойствомъ, что комплексъ $c + dc$, безконечно близкій къ c и ему при- надлежащій, обращаетъ уравненіе коннекса (для данныхъ x, u) въ без- конечно малую 2-го порядка отн. dc_{ji} . Это есть касательное плоское M_5 линейныхъ комплексовъ. Оно опредѣляетъ одинъ совершенно опредѣ- ленный линейный комплексъ, съ которымъ всѣ его комплексы находятся въ инволюціи, именно комплексъ K , котораго координаты суть:

$$\tau \frac{\partial(k, k)}{\partial k_{ji}} = \frac{\partial f}{\partial c_{ji}}.$$

Такимъ образомъ элементу (x, c, u) подчиняется элементъ того же типа (y, k, v) .

Совокупность всѣхъ элементовъ (y, k, v) , соответствующихъ всѣмъ элементамъ коннекса $f(x, c, u) = 0$, опредѣляетъ, слѣдовательно, новый коннексъ $F(y, k, v) = 0$ того же типа, который и будетъ сопряженнымъ первому.

Связь ихъ взаимная,—можно показать, что если для коннекса $F(y, k, v) = 0$ будемъ искать сопряженный, то получимъ исходный коннексъ $f(x, c, u) = 0$: коннексъ сопряженный сопряженному есть исходный коннексъ.

Такимъ образомъ, что касается теоріи сопряженнаго коннекса и связанныхъ съ нимъ свойствъ, указанный въ этомъ §-ѣ обобщенный коннексъ является болѣе близкимъ аналогомъ тернарнаго коннекса и коннекса съ элементомъ (точка, плоскость), чѣмъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

Напротивъ этотъ послѣдній коннексъ представляетъ болѣшую аналогію въ томъ, что касается главной коинциденціи и связанной съ нею интеграціонной задачи.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 15 февраля 1902 года.

1. Прочитана телеграмма К. А. Андреева съ выраженіемъ благодарности Обществу за поздравленія по поводу 30-лѣтія ученой дѣятельности.

2. Прочитаны письма проф. Zagemba и проф. Korn'a съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены-корреспонденты Общества.

3. А. М. Ляпуновъ и В. А. Стекловъ предложили въ члены Общества профессора Тулузскаго Университета E. Cosserat; рѣшено про-
извести баллотировку въ слѣдующемъ засѣданіи.

4. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе; „О Риманновой функціи ζ съ тремя аргументами“.

5. М. А. Тихомандрицкій отъ имени Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „О діаметрахъ кривыхъ 3-го порядка“.

Засѣданіе 5 апрѣля 1902 года.

1. Прочитано письмо отъ историко-филологическаго Общества при Харьковскомъ Университетѣ съ выраженіемъ благодарности за поздравленія, принесенныя Математическимъ Обществомъ въ день двадцатипятилѣтія историко-филологическаго Общества.

2. По предложенію распорядительнаго Комитета единогласно выбраны въ почетные члены Общества: академикъ А. А. Марковъ, профессоръ Электротехническаго Института К. А. Поссе и профессоръ Университета св. Владиміра В. П. Ермаковъ.

3. По предложенію А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова въ члены-корреспонденты Общества единогласно выбранъ профессоръ Кіевскаго Политехническаго Института А. П. Котельниковъ.

4. М. А. Тихомандрицкій отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовскаго сдѣлалъ сообщеніе: „Объ инвариантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНИЕ ОБЩЕСТВА

1 октября 1902 года.

1. Доложенъ и утвержденъ годичный отчетъ о дѣятельности Общества за истекшій 1901—1902 ак. годъ.

2. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1902—1903 акад. годъ; избраны: председателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами председателя: проф. Л. О. Струве и пр. доц. В. П. Алексѣевскій, секретаремъ пр. доц. А. П. Пшеборскій.

3. Единогласно безъ баллотировки избранъ въ почетные члены Общества проф. М. А. Тихомандрицкій.

4. Постановлено просить А. П. Пшеборскаго рассмотреть статью, присланную капитаномъ Фроловымъ изъ Онеги и дать о ней отзывъ.

Засѣданіе 18 октября 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ, что имъ получено письмо отъ М. А. Тихомандрицкаго съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены Общества.

2. В. А. Стекловъ отъ имени В. П. Ермакова сдѣлалъ сообщеніе: „Вариаціонное исчисленіе въ изложеніи Вейерштрасса“.

3. М. Н. Лаутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „О циклическихъ кривыхъ 3-го порядка“.

4. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторыя приложенія основной теоремы мемуара: Problème de refroidissement d'une barre hétérogène“.

Засѣданіе 3 декабря 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ Обществомъ книгахъ.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“.

3. М. Н. Лаутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „О первыхъ интегралахъ системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“.

4. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе „О Риманновой функціи ζ двухъ аргументовъ“,

Засѣданіе 7 февраля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.
 2. *И. И. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „Фотографическія изслѣдованія кометы 1902 г.“.
 3. *И. И. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „О сѣверномъ сіяніи на Мурманѣ“.
 4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ замѣчательномъ равенствѣ“.
 5. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе теоремы Malus'a“.
 6. Въ число членовъ Общества безъ избранія приняты проф. *Д. М. Синцовъ*.
-

Засѣданіе 18 апрѣля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.
 2. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихкихъ рядовъ“.
 3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ и каноническихкихъ“.
-

Засѣданіе 27 апрѣля 1902 года.

1. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной группѣ преобразованій пространства“.
 2. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ особыхъ элементахъ коннекса“.
 3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій“.
 4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе „О разложеніи данной функціи въ рядъ по функціямъ Чебышева“.
-

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

12 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель напомнилъ о смерти почетнаго члена Общества проф. *Н. В. Бугаева* и дѣйствительнаго члена приватъ-доцента *М. П. Косача* и предложилъ почтить память ихъ вставаніемъ.
2. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности и состояніи Общества за предыдущій 1902/3 акад. годъ.

3. В. А. Стекловъ предложилъ въ почетные члены Общества академикомъ Poincaré, Picard'a и Appell'я, которые избраны единогласно par acclamation.

4. Произведенъ выборъ членомъ распорядительнаго комитета на 1903, 4 акад. годъ. Избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и приватъ-доцентъ В. П. Алексѣевскій и секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Шнеборскій.

Засѣданіе 24 октября 1903 года.

1. В. А. Стекловъ предложилъ въ члены-корреспонденты Общества проф. Hadamard (Парижъ) и проф. Hurwitz (Цюрихъ). Постановлено баллотировать ихъ въ будущемъ засѣданіи.

2. Вслѣдствіе просьбы Владимірскаго общества любителей естествознанія о высылкѣ изданій Математическаго Общества постановлено высылать таковыя, начиная съ VIII тома.

3. В. А. Стекловъ отъ имени В. П. Ермакова сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка“.

4. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „Замѣтка о функціяхъ Kinkelin'a“.

5. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторые приложенія одной формулы суммированія“.

Засѣданіе 31 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма академикомъ Poincaré, Picard'a и Appell'я съ выраженіемъ благодарности за избраніе ихъ въ почетные члены Общества.

2. Предсѣдатель сообщилъ о предстоящемъ 2 ноября чествованіи тридцатилѣтія ученой дѣятельности проф. Харьковскаго Университета М. С. Дринова. Постановлено просить г. предсѣдателя привѣтствовать юбиляра отъ имени Общества.

3. Единогласно избраны въ члены-корреспонденты Общества проф. Hurwitz (Цюрихъ) и Hadamard (Парижъ).

4. А. П. Грузинцевъ прочелъ некрологъ М. П. Косача.

5. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи гаммоморфныхъ функцій“.

6. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ особенномъ свойствѣ рядовъ, наиболѣе часто встрѣчающихся въ анализѣ“.

Засѣданіе 28 ноября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма проф. Hurwitz'a и Hadamard'a съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены Общества.

2. *М. А. Тихомандрицкій* доложилъ статью *В. П. Ермакова*: „О періодическихъ функціяхъ“.

3. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ полиномахъ, входящихъ въ формулы суммированія Эйлера и Буля.“

Томъ VIII, № 6.

СОДЕРЖАНІЕ.

	<i>Стран.</i>
Къ теоріи коннексовъ [Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)]. <i>Д. М. Синцова</i>	241
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій	283

СООБЩЕНІЯ Харьковскаго Математическаго Общества

издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на восьмой томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые семь томовъ 2-й серіи (42 выпуска), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

	<i>Pages.</i>
Études sur les connexes, par <i>D. Sintsof</i>	241
Extrait des procès-verbaux des séances	283

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ IX.



ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Рыбная улица, домъ № 30-й.



1906.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

XI-го тома.

	<i>Стр.</i>
Составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ 1-му Января 1906 года	V—VII
Дисперсія металловъ, <i>А. П. Грузинцева</i>	1—32
Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣю- щія данный интегральный множитель факторіальной формы, <i>В. П. Ермакова</i>	33—59
По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ: „Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы“, <i>А. Н. Коркина</i>	51—59
Исслѣдованія по теоріи уравненій съ частными про- изводными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, <i>Н. Н. Салтыкова</i>	60—292
Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій	293—295

TABLE DES MATIÈRES

du tome IX.

	<i>Pag.</i>
Liste des membres de la Société mathématique de Kharkow.	V—VII
Sur la dispersion des métaux, par <i>A. Grousintzeff</i> . .	1—32
Sur les équations différentielles du premier ordre admettant un multiplicateur de la forme factorielle, par <i>W. Ermakoff</i> .	33—50
Remarque relative au Mémoire de M. W. Ermakoff: „Sur les équations différentielles du premier ordre admettant un multiplicateur de la forme factorielle“, par <i>A. Korkine</i> .	51—59
Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, par <i>N. Saltykow</i>	60—292
Extrait des procès verbaux des séances	293—295

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му 1906 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: В. А. Стекловъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. П. Грузинцевъ и Д. М. Сивцовъ.
3. Секретарь: А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго унив.
2. Р. Appel, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПб. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. универ. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго унив.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПб. унив.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
9. Е. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. Н. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПб. элект.-техн. инст.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьков. унив.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владимір Петровичъ, проф. Томскаго технол. инст.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. прен. Старобѣл. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьков. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.

6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальн. учил.
8. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
9. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
10. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
11. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. техн. инст.
12. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф., СПБ.
13. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронеж. кадетск. корпуса.
14. Ключниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьков. гимн.
15. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьков. техн. инст.
16. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьковской гимн.
17. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
18. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
19. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевского унив.
20. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
21. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реал. учил.
22. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьков. техн. инст.
23. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьков. техн. инст.
24. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
25. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
26. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьковскаго унив.
27. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
28. Раевскій Сергѣй Александровичъ, окр. insp. Харьков. учебн. окр.
29. Рейнбоътъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьков. унив.
30. Роговскій Евгений Александровичъ, проф. Харьков. унив.
31. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюп. реальн. учил.
32. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
33. Самецкій Рафаиль Николаевичъ, директ. Усть-Медвѣд. реал. учил.
34. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковск. обсерват.
35. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьков. унив.
36. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
37. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьков. унив.
38. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьков. унив.
39. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывший лабор. Харьк. унив.
40. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюп. реальн. учил.
41. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, бывш. преп. 1-й Харьк. гимн.
42. Шиллеръ Николай Николаевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
43. Шимковъ Андрей Петровичъ, директ. Москов. сельско-хозяйств. инст.
44. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьков. реальн. учил.
45. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьков. гимн.
46. Чернай Николай Андреевичъ, проф. Харьков. техн. инст.

D. Члены-корреспонденты.

а) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
2. Вороной Георгій Θεодосѣевичъ, проф. Варшавскаго унив.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПб. унив.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, бывш. проф. Варшавск. унив.
7. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Таганр. техн. учил.

б) иностранные.

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго унив.
 2. Hadamard J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
 3. Hurwitz A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
 4. Kneser A., проф. Бреславскаго унив.
 5. Korn A., проф. Мюнхенскаго унив.
 6. Zaremba S., проф. Краковскаго унив.
-

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 6.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-8).

1904.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 15-го Декабря 1904 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

ДИСПЕРСИЯ МЕТАЛЛОВЪ.

А. П. Грузинцева.

Въ изслѣдованіи „Электромагнитная теорія проводниковъ ¹⁾“ (Харьковъ 1899 г.), а также въ статьѣ „Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полюсовъ поглощенія“ мы получили общія формулы для дисперсіи въ проводникахъ такихъ, какъ металлы. Эти формулы связываютъ показатель преломленія n и коэффициентъ поглощенія $n\kappa$ при нормальномъ паденіи съ длиной волны λ слѣдующимъ образомъ:

$$n^2(1 - \kappa^2) = K\mu + \sum_1^m \frac{(P_i\lambda^2 - Q_i)\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda^2};$$

$$2n^2\kappa = D\mu + \sum_1^m \frac{(T_i\lambda^2 + R_i)\lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda^2},$$

причемъ K —діэлектрическая постоянная среды, μ —коэффициентъ магнитной проницаемости ея, D зависитъ отъ электропроводности среды ($D = 2C\tau$, C коэффициентъ электропроводности, выраженный въ абсолютныхъ электростатическихъ единицахъ, τ —періодъ). Буквой i обозначенъ номеръ іона, число которыхъ есть m .

Примѣнимъ наши формулы къ спектральной области, лежащей между величинами λ' и λ'' ($\lambda' < \lambda''$).

Разсмотримъ полосу поглощенія, лежащую далеко за λ' , въ области ультрафіолетовыхъ лучей. Обозначимъ указателемъ n принадлежность ко-

¹⁾ Записки Импер. Харьковскаго Университета. кн. 1, 1899 г.

²⁾ Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, т. VII, 1900 г.

личествъ къ этой области; тогда, пренебрегая дробью $\frac{\lambda_u^4}{\lambda^4}$ и дробью $\frac{Q_u}{\lambda^2}$, получимъ для этой области членъ:

$$\frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + (g_u^2 - 2\lambda_u^2)} = \frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + z_u^2}, \quad (1)$$

если положимъ, что

$$g_u^2 - 2\lambda_u^2 = z_u^2.$$

При этомъ z^2 можетъ быть и положительнымъ, ($g_u > \lambda_u \sqrt{2}$) и отрицательнымъ ($g_u < \lambda_u \sqrt{2}$) количествомъ.

Если предположимъ полосу поглощенія далеко за λ'' , т. е. въ области инфракрасныхъ лучей, то, обозначивъ въ этомъ случаѣ указателемъ r принадлежность количествъ къ этой области и, слѣдовательно, пренебрегая дробью $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^4}$, получимъ отъ этой полосы членъ:

$$-\frac{Q_r}{\lambda_r^4} \lambda^2 = -k_r \lambda. \quad (2)$$

Наконецъ можемъ допустить полосу поглощенія внутри области ($\lambda' - \lambda''$), тогда получимъ для нея: $\lambda_i = \lambda$ и слѣдовательно соответствующій членъ:

$$-\frac{(P_i \lambda_i^2 - Q_i) \lambda_i^2}{g_i^2 \lambda_i^2} = \frac{P_i \lambda_i^2 - Q_i}{g_i^2} = M_i. \quad (3)$$

Этотъ членъ при очень маломъ g_i можетъ быть достаточно большимъ.

Соединяя члены (1), (2), (3) и полагая:

$$\sum k_r = k; \quad K\mu - \sum M_i = A_0$$

и также для краткости письма:

$$n^2(1 - x^2) = A, \quad (a)$$

получимъ окончательно:

$$A = A_0 - k\lambda^2 + \sum \frac{P_u \lambda^2}{\lambda^2 + z_u^2}.$$

Если предположимъ, что въ ультрафіолетовой области существуетъ лишь одинъ іонъ, тогда получаемъ просто (положивъ $P_u = -P$)

$$A = A_0 - k\lambda^2 - \frac{P\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}, \quad (I)$$

а если пренебрежемъ, буде возможно, коэффициентомъ k , то будемъ имѣть очень простую формулу:

$$A = A_0 - \frac{P\lambda^2}{\lambda^2 + z^2}. \quad (\text{Ia})$$

Совершенно подобнымъ образомъ получаемъ и вторую дисперсионную формулу, взявъ:

$$2n^2\kappa = -B \quad (b)$$

въ такомъ видѣ:

$$B = -\frac{Q\lambda^3}{\lambda^2 + z^2}. \quad (\text{II})$$

Всѣ эти формулы получаются и въ теоріи Гельмгольца (коэффициентъ $\gamma = 0$).

Болѣе точная, но за то и болѣе сложная формула получилась-бы для функціи B , если-бы не пренебрегали нѣкоторыми членами. Нашли-бы слѣдующія части B :

1) при очень маломъ $\frac{\lambda_u}{\lambda}$:

$$\sum_u \frac{(T_u \lambda^2 + R_u) \lambda}{\lambda^2 + z_u^2}$$

2) при очень маломъ $\frac{\lambda}{\lambda_r}$:

$$\sum (T_r \lambda^2 + R_r) \cdot \frac{\lambda^3}{\lambda_r^3} \cdot \frac{1}{\lambda_r}$$

3) при $\lambda_i = \lambda$:

$$\sum \left(\frac{T_i \lambda_i^2 + R_i}{g_i^2} \right) \lambda_i = \sum N_i = B_0$$

и тогда получили-бы:

$$-B = D_0 \lambda + B_0 + \lambda^3 \sum_u \frac{T_u}{\lambda^2 + z_u^2} + \lambda \sum_u \frac{R_u}{\lambda^2 + z_u^2} \quad (\text{IIa})$$

и при одномъ іонѣ въ области ультрафіолетовой:

$$-B = B_0 + D_0 \lambda + \frac{(T\lambda^2 + R)\lambda}{\lambda^2 + z^2} \quad (\text{IIb})$$

или:

$$-B = B_0 + B_1 \lambda + \frac{B_2 \lambda}{\lambda^2 + z^2} \quad (\text{IIc})$$

гдѣ:

$$B_1 = D_0 + T, \quad B_2 = R - Tz^2.$$

Или, лучше:

$$-B = B_0 + \frac{(D_0 + T) \lambda^3 + (D_0 z^2 + R) \lambda}{\lambda^2 + z^2}$$

или:

$$-B = B_0 + \frac{Q \lambda^3}{\lambda^2 + z^2} + \frac{Q_1 \lambda}{\lambda^2 + z^2}. \quad (\text{IId})$$

§ 1. Такимъ образомъ, предполагая поглощеніе въ областяхъ очень малыхъ и очень большихъ волнъ, мы думаемъ, что дисперсія металловъ можетъ быть представлена слѣдующими формулами:

$$A = A_0 - k \lambda_1^2 - \frac{P \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + z^2} \quad (\text{I})$$

и

$$B = - \frac{Q \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + z^2}. \quad (\text{II})$$

Въ этихъ формулахъ длина λ_1 должна быть выражена въ $\text{О}^{\mu}, 1$ (т. е. въ 10^{-5} см.), а количество

$$z^2 = g_m^2 - 2\lambda_m^2$$

можетъ быть и положительно ($g_m > \lambda_m \sqrt{2}$) и отрицательно ($g_m < \lambda_m \sqrt{2}$), причемъ λ_m и g_m относятся къ одной полосѣ поглощенія, лежащей внутри области примѣненія формулъ (I) и (II) т. е. внутри области, крайнія значенія λ_1 въ которой суть: λ_1' и λ_1'' ($\lambda_1' < \lambda_1''$). Займемся теперь примѣненіемъ этихъ формулъ къ существующимъ наблюденіямъ надъ металлами ¹⁾ и прежде всего примѣнимъ наши формулы къ никкелю на томъ основаніи, что Друде примѣнялъ формулы своей электронной теоріи именно только къ этому металлу.

¹⁾ Примѣненіе къ металламъ дисперсіонныхъ формулъ, на сколько мнѣ извѣстно, производится здѣсь впервые.

Опредѣленіе постоянныхъ коэффициентовъ произведемъ слѣдующимъ простымъ приѣмомъ. Сначала изъ формулы (II)-й имѣемъ:

$$Q + \frac{B}{\lambda_1^2} z^2 = -\frac{B}{\lambda_1}. \quad (A)$$

Примѣняя это уравненіе къ двумъ, лучше всего, крайнимъ, наблюденіямъ, опредѣлимъ Q и z^2 .

Затѣмъ формула (I) по исключеніи дроби $\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + z^2}$ при помощи (II) даетъ

$$A_0 - k\lambda_1^2 + \frac{B}{\lambda_1} \cdot \frac{P}{Q} = A. \quad (B)$$

Примѣняя это уравненіе къ прежнимъ (крайнимъ) наблюденіямъ и одному промежуточному, будемъ имѣть *три* уравненія, изъ коихъ и найдемъ: A_0 , k и $\frac{P}{Q}$, а, слѣдовательно, и P . Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, а именно при очень малыхъ k или для очень малыхъ λ_1 , можно довольствоваться болѣе простой формулой, чѣмъ (I), и тогда вмѣсто (B) получимъ:

$$A_0 + \frac{B}{\lambda_1} \cdot \frac{P}{Q} = A, \quad (C)$$

такъ что достаточно будетъ *двухъ* наблюденій n и $n\lambda$ или R и одной изъ этихъ величинъ.

§ 2. Обращаемся къ *никкелю*. Рубенсъ и Дюбуа въ 1890 году опредѣлили показатели преломленія n по способу Кундта (тонкой прозрачной призмы) для нѣкоторыхъ металловъ, въ томъ числѣ и для никкеля для *пяти* различныхъ волнъ ¹⁾, сверхъ того Рубенсъ и Гагенъ нѣсколько позже опредѣлили отражательную способность никкеля (какъ и другихъ металловъ) ²⁾, R , а изъ этихъ данныхъ можно уже опредѣлить $n\lambda$, а слѣдовательно A и B и затѣмъ сравнивать ихъ съ данными опыта. Опредѣленіе $n\lambda$ по n и R можетъ быть совершено слѣдующимъ образомъ. Мы знаемъ, что

$$R = \frac{n^2(1 + x^2) + 1 - 2n}{n^2(1 + x^2) + 1 + 2n};$$

откуда находимъ:

$$\frac{1 + R}{1 - R} = \frac{n^2 + 1 + n^2 x^2}{2n} = q,$$

¹⁾ Ann. d. Physik und Chemie. 41. p. 522 (1890).

²⁾ Ann. d. Physik 8, p. 16—17 (1902) или Zeitschrift f. Inst.-Kunde, 1899. p. 305.

гдѣ положено:

$$q = \frac{1 + R}{1 - R}.$$

Поэтому опредѣляемъ n изъ формулы:

$$n^2 x^2 = 2nq - n^2 - 1. \quad (D)$$

§ 3. Такимъ образомъ находимъ A и B для $\lambda_1 = 4,31$ и $\lambda_1 = 6,71$ значенія: — 4,685; — 8,182 для 1-й волны и — 11,704; — 16,252 для 2-й.

Примѣняя къ этимъ двумъ случаямъ формулы (A) и (C), находимъ:

$$x^2 = 10,826; Q = 3,005; P = 40,252 \text{ и } A_0 = 20,742.$$

Такимъ образомъ можно полагать, что дисперсія никкеля въ области спектра ($0^{\mu},431 - 0^{\mu},671$), т. е. отъ линіи G до линіи Lia , представляется формулами:

$$A = 20,742 - \frac{40,252 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 10,826},$$

$$B = - \frac{3,005 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 10,826}.$$

Для повѣрки вычислимъ значенія A и B для ряда λ_1 и сравнимъ съ наблюденіями, часть которыхъ интерполирована нами. Результаты расчетовъ сопоставимъ въ таблицѣ:

λ_1	$B_{\text{выч.}}$	$B_{\text{набл.}}$	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{набл.}}$
4,31	— 4,689	— 4,685	— 8,183	— 8,182
4,50	— 5,488	— 6,102	— 8,812	— 9,418
4,86	— 6,859	— 6,918	— 10,014	— 10,717
5,00	— 7,347	— 7,204	— 10,49	— 10,80
5,50	— 8,901	— 8,156	— 12,17	— 12,07
5,89	— 9,938	— 9,222	— 13,487	— 13,067
6,00	— 10,204	— 9,576	— 13,86	— 13,52
6,50	— 11,299	— 10,388	— 15,55	— 14,79
6,71	— 11,708	— 11,704	— 16,255	— 16,252
7,00	— 12,226	— 13,823	— 17,23	— 18,04

Последнее наблюденіе экстраполировано нами изъ наблюденій Рубенса и Гагена 1902 года.

§ 4. Друде въ 1900 году ¹⁾ при помощи своей электронной теоріи далъ новыя формулы для дисперсіи металловъ и примѣнилъ ихъ къ никкелю въ предположеніи существованія 2-хъ родовъ электроновъ. Въ нашихъ обозначеніяхъ его формулы будутъ имѣть видъ:

$$A = 1 - \left(\frac{P_1}{\lambda_1^2 + z_1^2} + \frac{P_2}{\lambda_1^2 + z_2^2} \right) \lambda_1^2, \quad (1)$$

$$B = - \left(\frac{q_1}{\lambda_1^2 + z_1^2} + \frac{q_2}{\lambda_1^2 + z_2^2} \right) \lambda_1^3, \quad (2)$$

причемъ P_1 , P_2 , q_1 , q_2 , z_1^2 и z_2^2 суть постоянныя и между q_1 и q_2 существуетъ зависимость, представляющая электропроводность металла съ точки зрѣнія электронной теоріи. Эта зависимость имѣетъ видъ:

$$q_1 + q_2 = C, \quad (3)$$

гдѣ постоянная $C = 6,38 \cdot \sigma_r$, а σ_r есть коэффициентъ электропроводности, отнесенной къ ртути. Такимъ образомъ здѣсь тоже 5 постоянныхъ коэффициентовъ, подлежащихъ опредѣленію изъ дисперсіонныхъ наблюденій. Друде примѣнилъ свои формулы къ никкелю и нашелъ ихъ согласными съ наблюденіями, но, по непріятной случайности, при этихъ вычисленіяхъ принялъ за относительную электропроводность никкеля σ_r^* , *неверное число*: 3,1 (л. с. р. 163, таб. въ примѣчаніи) вмѣсто правильного 8,3. Если взять вѣрное число, то согласія не получается. Чтобы показать это дадимъ сначала пріемъ для опредѣленія постоянныхъ: P_1 , P_2 , ..., z_2^2 (самъ Друде такого пріема не даетъ).

Положимъ:

$$P_1 + P_2 = X; \quad P_1 z_2^2 + P_2 z_1^2 = Y; \quad q_1 z_2^2 + q_2 z_1^2 = Z, \quad (a)$$

въ такомъ случаѣ (1) и (2) дадутъ:

$$A - 1 = - \frac{(\lambda_1^2 X + Y) \lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + z_1^2)(\lambda_1^2 + z_2^2)}, \quad (b)$$

$$\frac{B}{\lambda_1} = - \frac{(\lambda_1^2 C + Z) \lambda_1^3}{(\lambda_1^2 + z_1^2)(\lambda_1^2 + z_2^2)}. \quad (c)$$

¹⁾ Physikalische Zeitschrift. Jahrgang I. 1900, p. 163.

Раздѣляя эти равенства одно на другое и полагая

$$m = \frac{A-1}{\frac{B}{\lambda_1}},$$

что извѣстно изъ наблюдений, найдемъ:

$$\lambda_1^2 X + Y - mZ = Cm\lambda_1^2. \quad (4)$$

Примѣняя это соотношеніе къ тремъ наблюдениямъ, опредѣлимъ: X , Y и Z . Затѣмъ слѣдовательно, знаемъ:

$$U = \lambda_1^2 X + Y,$$

а пользуясь равенствомъ (b) находимъ:

$$\lambda_1^2(z_1^2 + z_2^2) + z_1^2 z_2^2 = -\lambda_1^4 - \frac{U\lambda_1^2}{A-1}.$$

Примѣняя къ двумъ наблюдениямъ, опредѣлимъ:

$$z_1^2 + z_2^2 \quad \text{и} \quad z_1^2 z_2^2,$$

а, слѣдовательно, и z_1^2 , z_2^2 . Зная же z_1^2 и z_2^2 , изъ соотношеній (a) и (3) найдемъ P_1 , P_2 , q_1 и q_2 .

§ 5. Примѣнимъ теперь все это къ никкелю. Возьмемъ для него $\sigma_r = 8,3$, тогда $C = 52.954$. Затѣмъ возьмемъ три наблюденія:

λ_1	4,31	5,89	7,00
A	— 4,685	— 9,222	— 13,823
B	— 8,182	— 13,067	— 18,040.

При помощи этихъ наблюдений находимъ для Ni :

$$A = 1 - \frac{936,8 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 3288,0} - \frac{0,445 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 2,00},$$

$$B = - \frac{51,178 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 3288,0} - \frac{1,776 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 2,00}.$$

Производя обратную повѣрку, найдемъ, напримѣръ, для $\lambda_1 = 4,86$:
 $A = -6,10$ вм. — 6,92, что даетъ наблюденіе, а $B = -9,73$ вм. — 10,72.

Для $\lambda_1 = 6,5$ находимъ: $A = -11,310$ в.м. 10,388 и $B = -15,242$ в.м. — 14,79. Такимъ образомъ наши формулы ближе удовлетворяютъ наблюденіямъ, чѣмъ формулы Друде, при томъ же въ нихъ число постоянныхъ на одну меньше; сверхъ того не измѣняется общій источникъ полученія ихъ для всякихъ среднихъ. Есть еще одинъ пунктъ, въ силу котораго формулы Друде теряютъ свое значеніе, по крайней мѣрѣ съ принципиальной стороны. Дѣло въ томъ, что количества z_1^2 и z_2^2 по ихъ физическому значенію въ электронной теоріи Друде—*величины положительныя*, но оказывается, что даже для никкеля, если взять за крайнія наблюденія $\lambda_1 = 4,31$ и $\lambda_1 = 6,71$ в.м. 7,0, то получается: $z_1^2 > 0$, а $z_2^2 < 0$. Дѣйствительно, изъ наблюденій для $\lambda_1 = 4,31$; 5,89 и 6,71 имѣемъ сначала:

$$X = 469,13; \quad Y = -1977,7; \quad Z = 1265,9,$$

а затѣмъ, комбинируя 1-ое и 2-ое наблюденія, найдемъ:

$$z_1^2 = 1596,75 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -4,95.$$

А изъ комбинаціи 1-го и 3-го наблюденій получимъ:

$$z_1^2 = 1674,98 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -5,58.$$

§ 6. Хотя отрицательныя значенія z^2 противорѣчатъ теоріи Друде, но, строго говоря, ничего не колеблютъ въ основныхъ взглядахъ электронной теоріи и ниже мы покажемъ, что и изъ теоріи Гельмгольца или нашей можно получить формулы Друде, но уже безъ стѣсняющаго условія: $z^2 > 0$, стоитъ только отбросить уравненіе (3). Получаемыя при этомъ формулы достаточно удовлетворяютъ наблюденіямъ. Дѣйствительно, если мы dokonчимъ вычисленіе коэффициентовъ, принявъ, что:

$$z_1^2 = 1635,87 \quad \text{и} \quad z_2^2 = -5,27 \quad (\sqrt{-z_2^2} = 2,296)$$

т. е. среднія изъ вышенайденныхъ, то получимъ:

$$P_1 = 468,83; \quad P_2 = 0,3014; \quad q_1 = 52,013; \quad q_2 = 0,9414,$$

и формулы дисперсіи никкеля въ области спектра отъ $\lambda_1 = 4,31$ до $\lambda_1 = 6,71$ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - \frac{468,83 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1635,87} - \frac{0,3014 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 5,27} \\ B &= - \frac{52,013 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1635,87} - \frac{0,9414 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 5,27} \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

Чтобы показать на сколько эти формулы могут представить факты, мы вычислили обратно значенія A и B для промежуточных значеній λ_1 . Вотъ результаты:

λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{набл.}}$	$B_{\text{выч.}}$	$B_{\text{набл.}}$
4,31	— 4,688	— 4,685	— 8,312	— 8,182
4,50	— 5,140	— 6,102	— 8,589	— 9,418
4,86	— 6,061	— 6,912	— 9,487	— 10,717
5,00	— 6,437	— 7,204	— 9,879	— 10,800
5,50	— 7,877	— 8,156	— 11,464	— 12,070
5,89	— 9,114	— 9,222	— 12,901	— 13,067
6,00	— 9,448	— 9,576	— 13,337	— 13,520
6,50	— 11,148	— 10,388	— 15,503	— 14,790
6,71	— 11,899	— 11,704	— 16,503	— 16,252
7,00	— 12,973	— 13,823	— 17,972	— 18,040

Сравнивая эти числа съ числами первой таблицы, должны сдѣлать выводы въ пользу нашихъ формулъ.

§ 7. Покажемъ теперь, какимъ образомъ можно получить формулы вида формулъ Друде (разумѣется, только въ формальномъ отношеніи) изъ нашихъ общихъ формулъ.

Если предположимъ, что K и μ относятся къ эфиру (см. теоретическую часть настоящей статьи), т. е. $K = 1$, $\mu = 1$; затѣмъ предположимъ, что Q_i и λ_i малы въ сравненіи съ λ , тогда при наличности 2-хъ родовъ іонъ (какъ предполагаетъ Друде) получимъ:

$$A = 1 + \frac{P_1 \lambda^2}{\lambda^2 + (g_1^2 - 2\lambda_1^2)} + \frac{P_2 \lambda^2}{\lambda^2 + (g_2^2 - 2\lambda_2^2)},$$

а это сводится на формулу (1) для A съ той существенной разницей, что $z_i^2 = g_i^2 - 2\lambda_i^2$ ($i = 1, 2$) можетъ быть и положительное, и отрицательное количество.

Далѣе, приведя правую часть формулы для $2n^2\kappa$ къ одному знаменателю, получимъ:

$$B = - \sum \frac{(T_i' \lambda^2 + R_i') \lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda^2}.$$

Пренебрегая R_i' въ сравненіи съ первымъ членомъ и допуская 2 рода іоновъ, получаемъ, подобно предыдущему, формулу (2), но безъ условія (3).

Въ такомъ случаѣ надо *три полныхъ наблюдений*, т. е. значенія A и B (или n и x) для волнъ λ_1 , чтобы опредѣлить *6-ть* коэффициентовъ: $P_1, P_2; q_1, q_2; z_1^2$ и z_2^2 изъ формулъ (1) и (2). Это опредѣленіе можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ.

Пусть:

$$-\frac{A-1}{\lambda_1^2} = a; \quad -\frac{B}{\lambda_1^3} = b \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} = m.$$

Это извѣстныя числа. Далѣе положимъ:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= q; \\ P_1 + P_2 &= Xq; \quad P_1 z_2^2 + P_2 z_1^2 = Yq, \\ q_1 z_2^2 + q_2 z_1^2 &= Zq; \quad z_1^2 + z_2^2 = u; \quad z_1^2 z_2^2 = v, \end{aligned}$$

тогда уравненія (1) и (2) будутъ ¹⁾:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^3 X + Y) q &= a\lambda_1^4 + a\lambda_1^2 u + av, \\ (\lambda_1^3 + Z) q &= b\lambda_1^4 + b\lambda_1^2 u + bv. \end{aligned}$$

Раздѣляя верхнее уравненіе на нижнее, получимъ:

$$\lambda_1^3 X + Y - mZ = m\lambda_1^3. \quad (5)$$

Примѣнивъ это уравненіе къ тремъ наблюденьямъ, опредѣлимъ: X, Y и Z , а затѣмъ имѣемъ напредѣръ уравненіе:

$$\lambda_1^3 u + v - \frac{Z + \lambda_1^3}{b} q = -\lambda_1^4. \quad (6)$$

§ 8. Примѣнивъ это уравненіе къ тѣмъ-же тремъ наблюденьямъ, найдемъ: u, v и q ; а слѣдовательно и остальные коэффициенты: $P_1, P_2; q_1$ и q_2 .

Получаемъ слѣдующія формулы для никкеля:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{55,648 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 142,096} + \frac{0,647 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 2,510}, \\ B &= -\frac{5,072 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 142,096} - \frac{1,135 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 2,510}. \end{aligned}$$

¹⁾ Количество q есть прежнее C (§ 4), а X, Y и Z настоящаго параграфа суть отношенія $X:C; Y:C$ и $Z:C$ § 4.

Согласіе получается худшее, такъ напримѣръ для $\lambda_1 = 4.86$ имѣемъ:

$$A = -6,208 \text{ в.м.} - 6,918 \text{ и } B = -9,685 \text{ в.м.} - 10,717,$$

а для $\lambda_1 = 6,0$:

$$A = -9,554 \text{ в.м.} - 9,576 \text{ и } B = -13,47 \text{ в.м.} - 13,52.$$

Для всей разсматриваемой области имѣемъ:

λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{набл.}}$	$B_{\text{выч.}}$	$B_{\text{набл.}}$
4,31	— 4,686	— 4,685	— 8,182	— 8,182
4,50	— 5,185	— 6,102	— 8,676	— 9,418
4,86	— 6,208	— 6,918	— 9,685	— 10,717
5,00	— 6,607	— 7,204	— 10,101	— 10,800
5,50	— 8,062	— 8,156	— 11,702	— 12,070
5,89	— 9,224	— 9,222	— 13,068	— 13,067
6,00	— 9,554	— 9,576	— 13,470	— 13,520
6,50	— 11,066	— 10,388	— 15,304	— 14,790
6,71	— 11,705	— 11,704	— 16,253	— 16,252
7,00	— 12,587	— 13,823	— 17,476	— 18,040

§ 9. Для полного сравненія всѣхъ формулъ вычислимъ постоянныя никкеля въ формулѣ (I). Значенія Q и z^2 останутся тѣже, измѣнятся лишь P и A_0 , да войдетъ новый коэффициентъ k . Возьмемъ среднее наблюденіе для $\lambda_1 = 5,89$. Оказывается, что членъ $k\lambda_1^2$ для Ni негодится.

Для дальнѣйшей повѣрки опредѣлимъ A и B для длины волнъ въ 2,51; 3,05; 3,87 и 4,20. Для этихъ волнъ Рубенсъ опредѣлялъ отражательную способность никкеля. Найдемъ для A значенія:

$$+0,758; -1,456; -2,671 \text{ и } -4,391;$$

а для B :

$$-14,46; -4,521; -6,502 \text{ и } 7,913.$$

Зная A и B , найдемъ n и x , а именно:

$$n \quad 2,760 \quad 1,282 \quad 1,476 \quad 1,526,$$

$$x \quad 0,949 \quad 1,375 \quad 1,492 \quad 1,698.$$

Примѣняя сюда правило Кундта, найденное имъ для поглощающихъ срединъ, можемъ утверждать, что максимумъ поглощенія лежитъ между $\lambda_1 = 2,51$ и 3,05, когда $x = 1$. Простой интерполяціей найдемъ, что тогда $\lambda_1 = 2,54$.

Опредѣляя R по n и κ и сравнивая съ наблюденіями, получимъ слѣдующее:

$$\begin{array}{l} R_{\text{выч.}} \quad 47,4 \quad 38,3 \quad 46,2 \quad 53,4, \\ R_{\text{набл.}} \quad 37,4 \quad 44,2 \quad 48,8 \quad 56,6. \end{array}$$

Для экстраполяціи результаты достаточно удовлетворительны. Если бы опредѣлить A и B , а затѣмъ и R при помощи нашихъ болѣе простыхъ формулъ, то нашли-бы:

$$R_{\text{выч.}} \quad 17,2 \quad 21,6 \quad 34,3 \quad \text{и} \quad 52,7$$

совпаденіе худшее, чего можно было ожидать, такъ какъ въ нашихъ простыхъ формулахъ постоянныхъ входитъ только 4, а не 6.

§ 10. Перейдемъ теперь къ наблюденіямъ надъ дисперсіей *кобальта*. Миноръ въ 1903 году ¹⁾ произвелъ рядъ опредѣленій n и κ по способу Фойхта для области отъ $\lambda_1 = 2,313$ до $\lambda_1 = 5,893$. Примѣняя всѣ наблюденія, находимъ по способу наименьшихъ квадратовъ значенія коэффициентовъ формулъ (I) (безъ члена съ k) и (II):

$$A_0 = 11,345; P = 24,347; Q = 3,333; z^2 = 5,243,$$

такъ что дисперсія C_0 представится слѣдующими формулами:

$$A = 11,345 - \frac{24,347 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 5,243}; \quad B = - \frac{3,333 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 5,243}.$$

Для повѣрки сравнимъ вычисленныя значенія A и B съ наблюденными, т. е. найденными по наблюденнымъ n и κ :

λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{набл.}}$	${}^1) B_{\text{выч.}}$	$B_{\text{набл.}}$
2,313 —	0,952	—	0,829 —	3,894 —
2,573 —	2,243	—	1,728 —	4,787 —
2,749 —	3,029	—	2,592 —	5,409 —
2,981 —	3,968	—	3,193 —	6,107 —
3,467 —	5,607	—	3,752 —	8,047 —
3,950 —	6,878	—	5,833 —	9,853 —
4,500 —	7,995	—	8,492 —	11,915 —
5,000 —	8,781	—	10,047 —	13,778 —
5,550 —	9,405	—	11,047 —	15,625 —
5,893 —	9,809	—	11,817 —	17,068 —
6,400 —	10,240	—	12,628 —	18,911 —
6,300 —	10,161	—	12,679 —	18,550 —

¹⁾ Annalen der Physik. Bd. 10. p. 608 (1903).

Мы еще прибавили одно наблюдение Друде для $\lambda_1 = 6,3$.

Согласіе не особенно удовлетворительное и для видимой части спектра лучше, чѣмъ для ультрафіолетовой области, что особенно замѣтно для величины B .

Если введемъ членъ съ $k\lambda_1^2$, то при прежнихъ значеніяхъ Q и z^2 найдемъ по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$A = 3,902 - 0,2967 \cdot \lambda_1^2 - \frac{6,908 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 5,243}.$$

Сравненіе дасть:

λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{наб.}}$	λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{наб.}}$
2,313	— 1,174	— 0,829	4,50	— 7,593	— 8,492
2,573	— 1,917	— 1,728	5,00	— 9,226	— 10,047
2,749	— 2,418	— 2,592	5,50	— 10,960	— 11,047
2,981	— 3,080	— 3,193	5,893	— 12,404	— 11,827
3,467	— 4,474	— 3,752	6,30	— 13,976	— 12,679
3,950	— 5,897	— 5,833			

Согласіе уже болѣе удовлетворительное.

Для дальнѣйшаго сравненія вычислимъ A и B для волнъ: 4,31; 4,86; 5,89; 6,44 и 6,71, для которыхъ Дюбуа и Рубенсъ ¹⁾ въ 1890 г. непосредственно опредѣляли по способу Кундта показатели преломленія n . Этотъ послѣдній по A и B находится изъ формулы:

$$2n^2 = \sqrt{A^2 + B^2} + A.$$

Получаемъ слѣдующій результатъ:

n по вычисленію	1,76	1,84	2,08	2,17	2,21,
n по наблюденію	2,11	2,39	2,76	3,10	3,22.

Согласіе слабое, но характеръ измѣненія общихъ.

Если вычислимъ постоянныя по формуламъ Друде, принимая для So величину $\sigma_v = 9,875$, то получимъ, исходя изъ наблюденій для $\lambda_1 = 2,313$; 3,950 и 5,893:

$$A = 1 + \frac{0,3023 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1,46} - \frac{522,702 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1349,34},$$

$$B = - \frac{1,418 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1,46} - \frac{61,585 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1379,34}.$$

¹⁾ Annalen der Physik und Chemie. Bd. 41, p. 521 (1890).

При этомъ для опредѣленія z_1^2 и z_2^2 пользовались наблюденіями 1 ($\lambda_1 = 2,313$) и 3 ($\lambda_1 = 5,893$). Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$A_{\text{выч.}}$	$A_{\text{наб.}}$	$B_{\text{выч.}}$	$B_{\text{наб.}}$
2,313	— 0,826	— 0,829	— 3,141	— 3,142
2,573	— 1,304	— 1,728	— 3,757	— 4,519
2,749	— 1,658	— 2,592	— 4,210	— 6,035
2,981	— 2,160	— 3,193	— 4,831	— 7,000
3,467	— 3,345	— 3,752	— 6,270	— 7,615
3,950	— 4,698	— 5,833	— 7,905	— 9,476
4,500	— 6,446	— 8,492	— 10,051	— 12,261
5,000	— 8,222	— 10,047	— 12,302	— 14,325
5,500	— 10,173	— 11,047	— 14,869	— 15,991
5,893	— 11,825	— 11,827	— 17,127	— 17,130
6,300	— 13,644	— 12,679	— 19,705	— 18,630

Въ послѣдней строкѣ мы прибавили наблюденіе Друде надъ кобальтомъ. Въ общемъ согласіи вычисленій и наблюденій слабое и хуже, чѣмъ по нашимъ формуламъ.

Если-бы для опредѣленія z_1^2 и z_2^2 взяли наблюденія 2 и 3 или 1 и 2, то имѣли-бы для z_1^2 и z_2^2 числа: 974,540 и 1552,390, а для $z_1^2 z_2^2$ числа: 3976,57 и — 5039,60.

Хотя эти числа не особенно согласны, но возьмемъ среднія значенія и тогда найдемъ:

$$z_1^2 = 1292,218 \quad \text{и} \quad z_2^2 = 0,352,$$

а при помощи ихъ опредѣляемъ:

$$P_1 = 522,267; \quad P_2 = 0,1326; \quad q_1 = 61,469 \quad \text{и} \quad q_2 = 1,534,$$

эти коэффициенты близки къ прежнимъ.

Такимъ образомъ находимъ для дисперсіи кобальта слѣдующія формулы въ электронной теоріи Друде:

$$A = 1 - \frac{522,267 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 1292,218} - \frac{0,1326 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0,352},$$

$$B = - \frac{61,469 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 1292,218} - \frac{1,534 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0,352}.$$

Эти формулы дают для A и B числа уже болѣе близкія къ дѣйствительности, хотя все еще худшія, чѣмъ наши формулы. Вотъ примѣры:

λ_1	2,313	2,749	2,981	5,000
$A_{\text{выч.}}$	— 1,277	— 2,164	— 2,695	— 9,043
$B_{\text{выч.}}$	— 3,915	— 5,011	— 5,649	— 13,390.

Слѣдовательно и здѣсь заключеніе въ пользу нашихъ формулъ.

§ 11. Желѣзо. Разберемъ теперь наблюденія надъ дисперсіей желѣза, какъ Минора, такъ и Рубенса съ Гагеномъ и Дюбуа.

Наблюденія Минора обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 2,265$ (226,^м5) до $\lambda_1 = 6,3$ (630,^м0), т. е, область видимыхъ лучей и ультрафіолетовыхъ; инфракрасныхъ Миноръ не наблюдалъ.

Вычисляя всѣ 12 наблюденій по способу наименьшихъ квадратовъ, мы нашли, что дисперсія желѣза (стали) можетъ быть представлена слѣдующими формулами съ четырьмя коэффициентами:

$$A = 1,145 - \frac{5,960 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 2,960}, \quad B = - \frac{2,786 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 2,960}.$$

Обратная повѣрка даетъ слѣдующія результаты:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$	— $A_{\text{выч.}}$ по 2-й фор.
2,265	2,634	0,991	4,002	4,259	1,865
2,313	2,692	1,094	4,149	4,424	1,904
2,573	2,973	1,579	4,954	5,140	2,119
2,981	3,326	2,039	6,230	5,593	2,471
3,255	3,513	2,487	7,089	5,706	2,719
3,611	3,712	3,806	8,200	7,484	3,061
4,000	3,864	4,600	9,405	9,161	3,506
4,500	4,054	5,055	10,938	11,032	4,018
5,000	4,184	5,515	12,456	13,159	4,558
5,500	4,283	5,569	13,958	15,252	5,292
5,893	4,346	5,610	15,832	17,073	5,856
6,300	4,401	5,493	16,334	18,783	6,365

Согласіе слабое, особенно для A , поэтому мы ввели членъ съ λ_1^2 и получили для A формулу:

$$A = -0,4454 - 0,12275 \lambda_1^2 - \frac{1,2455 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 2,960}.$$

Значенія A , вычисленныя по этой формулѣ, помѣщены въ шестомъ столбцѣ предыдущей таблицы.

Согласіе лучше, но все еще слабое.

Любопытно, что если-бы мы разбили всю область наблюденій на двѣ: ультрафіолетовую и видимую, то получили-бы для первой формулы:

$$A = 26,528 - \frac{32,485 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0,926}, \quad B = -\frac{2,220 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0,926},$$

а для второй:

$$A = -1,642 - \frac{4,840 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 10,166}, \quad B = -\frac{3,745 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 10,166}.$$

Согласіе получается болѣе совершенное, какъ видно изъ чиселъ найденныхъ для A и B въ обѣихъ областяхъ:

λ_1	2,265	2,313	2,573	2,981	3,255	3,611
— $A_{\text{выч.}}$	0,992	1,165	1,973	2,893	3,346	3,802
— $B_{\text{выч.}}$	4,259	4,377	5,010	5,992	6,644	7,483

ультрафіолетовой и

λ_1	4,000	4,500	5,000	5,500	5,893	6,300
— $A_{\text{выч.}}$	4,601	4,864	5,083	5,265	5,386	5,495
— $B_{\text{выч.}}$	9,160	11,221	13,313	15,418	17,073	18,788

для видимой области спектра; причемъ для вычисленія коэффициентовъ служили крайнія наблюденія въ каждой области. Согласіе, какъ видно, весьма удовлетворительное.

Разсмотримъ теперь формулы электронной теоріи Друде. Примемъ относительный коэффициентъ электропроводности для стали 5.0, тогда получимъ $C = 31,90$ и мы найдемъ изъ тѣхъ-же трехъ наблюденій слѣдующія формулы для A и B :

$$A = 1 - \frac{66,120 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 327,708} - \frac{0,4459 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 8,812},$$

$$B = -\frac{31,818 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 327,708} - \frac{0,0824 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 8,812},$$

формулы явно не состоятельныя.

§ 12. Примѣнимъ теперь наши формулы къ наблюденіямъ Рубенса и Дюбуа ¹⁾, и Рубенса одного ²⁾ надъ сталью.

Эти наблюденія обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 4,31$ до $\lambda_1 = 7,0$ и даютъ для нѣкоторыхъ волнъ количества отраженнаго свѣта (въ $\frac{0}{100}\%$ падающаго), а для другихъ показатель преломленія; по этимъ даннымъ мы вычисляемъ количество n по формуламъ § 2. Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующій рядъ данныхъ:

λ_1	4,31	4,50	4,86	5,00	5,50	5,89	6,00	6,44	6,50	6,71	7,0
n	2,05	2,18	2,43	2,47	2,61	2,72	2,79	3,06	3,07	3,12	3,20
$R\%$	53,2	55,4	55,1	55,0	55,0	55,5	55,7	56,3	56,4	57,3	58,5.

Здѣсь косыя числа опредѣлены интерполированіемъ (а крайнія—экстраполированіемъ) и значенія отражательной способности R взяты среднія изъ всѣхъ наблюденій названныхъ ученыхъ.

Взявъ за исходныя наблюденія для $\lambda_1 = 4,31$ и $\lambda_1 = 6,71$, получимъ слѣдующія формулы для дисперсіи стали въ наблюдаемой области (видимыхъ лучей):

$$A = -11,742 - \frac{10,673 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 7,087}, \quad B = -\frac{3,767 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 7,087}.$$

Производя обратную повѣрку, находимъ слѣдующія результаты:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$ — $A_{\text{наб.}}$		— $B_{\text{выч.}}$ — $B_{\text{наб.}}$	
4,31	4,016	4,015	11,752	11,754
4,50	3,836	4,688	12,557	13,396
4,86	3,532	3,972	14,083	15,279
5,00	3,426	3,814	14,675	15,555
5,50	3,095	3,356	16,786	16,645
5,89	2,879	3,214	18,425	17,722
6,00	2,824	3,044	18,884	18,362
6,44	2,197	2,161	20,720	20,776
6,50	2,602	2,175	20,968	20,912
6,71	2,520	2,519	21,839	21,843

¹⁾ Ann. d. Physik und Chemie. Bd. 41. p. 521. (1890).

²⁾ Id. Bd. 37. p. 265, (1889).

Согласіе достаточное, особенно для болѣе длинныхъ волнъ. Можно еще экстраполировать n и R для $\lambda_1 = 7,0$ и $10,0$; получаются для A и B значенія: — 2,417; — 1,775 для A и — 23,04 и — 35,18 для B .

Наши формулы даютъ: — 2,963; — 1,623 и — 23,26; — 35,20.

Можно получить еще сравненіе отражательной способности для инфракрасныхъ волнъ. Такъ для незакаленной стали Рубенсъ и Гагенъ нашли, что для

λ_1	8,0	12,0	15,0
$R\%$	58,0	67,8	71,9 ¹⁾ .

Вычисляя для этихъ волнъ A и B по нашимъ формуламъ, а затѣмъ опредѣляя по нимъ R , найдемъ для него значенія: 59,9; 65,7; 68,7. Даже для $\lambda_1 = 20,0$ еще имѣемъ $R = 72,3\%$, а наблюденіе даетъ 76,7%.

Если-бы вычислили формулу для A съ членомъ $k\lambda_1^2$, то нашли-бы, присоединивъ къ крайнимъ наблюденіямъ еще наблюденіе для $\lambda_1 = 5,0$:

$$A = -3,513 + 0,0694 \cdot \lambda_1^2 - \frac{2,465 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 7,087}.$$

Сравненіе результатовъ вычисленій и наблюденій дало-бы слѣдующее:

λ_1	4,31	4,50	4,86	5,00	5,50	5,89	6,00	6,44	6,50	6,71
— $A_{\text{выч.}}$	4,009	3,934	3,770	3,699	3,411	3,153	3,075	2,740	2,693	2,519.

Эти значенія A еще ближе къ наблюденнымъ.

Вообще надо сказать, что наблюденія Рубенса и Гагена, а также Рубенса одного или съ Дюбуа лучше укладываются въ наши формулы, чѣмъ наблюденія Минора; причина этого лежитъ, вѣроятно, въ большей точности наблюденій первыхъ ученыхъ.

§ 13. Мѣди. Наблюденія Минора обнимаютъ область отъ $\lambda_1 = 2,313$ до $\lambda_1 = 6,300$. Принявъ во вниманіе всю совокупность наблюденій, получимъ по способу наименьшихъ квадратовъ слѣдующія формулы для представленія дисперсіи мѣди:

$$A = -9,479 + \frac{4,287 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3,618}, \quad B = -\frac{0,6746 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 3,618} \quad (1)$$

если ограничимся простѣйшей формой для A , если-же примемъ въ расчетъ членъ $k\lambda_1^2$, то получимъ:

$$A = 4,554 - 0,2819 \cdot \lambda_1^2 - \frac{1,1996 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 3,618}. \quad (2)$$

¹⁾ Изъ другихъ наблюденій 70,8%.

Вотъ результаты обратной повѣрки:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$		— $A_{\text{наб.}}$		— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
	по 1-й фор.	по 2-й фор.				
2,313	—3,563	0,659	0,191		4,820	4,039
2,573	0,025	—0,042	0,054		3,828	3,979
2,749	1,255	—0,122	0,033		3,588	3,766
2,981	2,248	—0,026	0,157		3,392	3,313
3,467	3,346	0,555	0,733		3,346	3,469
3,950	3,898	1,407	1,732		3,469	4,136
4,500	4,260	2,616	3,339		3,696	4,861
5,000	4,467	3,997	4,275		3,944	5,141
5,350	4,572	4,889	4,172		4,131	4,570
5,500	4,610	5,337	4,192		4,214	3,984
5,750	4,666	6,115	5,471		4,356	3,161
5,893	4,694	6,576	6,536		4,448	3,245
6,300	4,762	7,946	8,756		4,676	3,385

Согласіе, особенно для ультрафіолетовой части, слабое.

Если вычислимъ формулы электронной теоріи Друде, то встрѣтимся съ тѣмъ-же обстоятельствомъ, какъ и въ случаѣ желѣза.

§ 14. Примѣняя „электронныя“ формулы къ мѣди и руководясь графикой R по наблюденіямъ Минора, можно думать, что между $\lambda_1 = 4,5$ и $\lambda_1 = 5,893$ нѣтъ сильнаго поглощенія, поэтому получимъ слѣдующія формулы для области (4,5 — 5,893):

$$A = 1 - \frac{2,580 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 5,188} - \frac{0,941 \cdot \lambda_1^2}{41,952 - \lambda_1^2},$$

$$B = -\frac{0,8746 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 5,138} + \frac{0,0991 \cdot \lambda_1^3}{41,952 - \lambda_1^2}.$$

Сравненіе съ наблюденіями Минора дасть:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
4,50	3,335	3,339	4,858	4,861
5,00	3,635	4,275	4,773	5,141
5,35	4,165	4,172	4,591	4,570
5,50	5,346	4,192	4,385	3,984
5,75	5,554	5,471	3,837	3,161
5,893	6,553	6,536	3,241	3,245

Очень можетъ быть, что существуютъ области поглощенія и внутри этихъ предѣловъ λ_1 , на примѣръ, вѣроятно, вблизи $\lambda_1 = 5,0$ и $\lambda_1 = 5,5$, но вслѣдствіе большого интервала въ наблюденіяхъ они не обнаруживаются графикой R .

Сравненіе этихъ результатовъ съ результатами по другимъ формуламъ [(1) и (2)], какъ будто говорить въ пользу первыхъ.

§ 15. *Золото*. Для золота имѣемъ большой рядъ наблюденій Рубенса и Гагена ¹⁾. Примемъ за основныя крайнія наблюденія: $\lambda_1 = 6,5$ и $\lambda_1 = 25,0$, слѣдовательно, имѣемъ дѣло главнымъ образомъ съ инфракрасной областью спектра. Для этихъ значеній вычислимъ:

$$A = -12,82 \text{ и } -279,2, \quad B = -2,792 \text{ и } -85,51.$$

Съ этими данными находимъ для дисперсіи золота въ разсматриваемой области слѣдующія формулы:

$$A = 25,62 - \frac{615,01 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 636,34}, \quad B = -\frac{6,9012 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 636,34}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	$-A_{\text{выч.}}$	$-A_{\text{наб.}}$	$-B_{\text{выч.}}$	$-B_{\text{наб.}}$
6,5	12,65	12,82	2,791	2,792
7,0	18,35	17,08	3,454	3,139
8,0	30,58	26,94	5,045	3,841
10,0	57,91	47,20	9,372	9,250
12,0	87,88	78,10	15,280	12,390
15,0	135,04	126,70	27,04	22,370
20,0	211,74	233,00	53,27	62,830
25,0	279,11	279,2	85,48	85,510

Здѣсь мы опредѣляли n по найденнымъ изъ опыта $nx = g$ и R , пользуясь формулой (§ 2):

$$n = q - \sqrt{q^2 - g^2 - 1},$$

гдѣ

$$q = \frac{1 + R}{1 - R}.$$

¹⁾ Ann. d. Physik. Bd. 1, p. 373 (1900). Bd. 8, p. 17 и p. 447 (1902), Bd. 11, p. 881 (1903).

Хотя для R мы брали среднее изъ различныхъ опредѣленій Рубенса и Гагена, но всетаки и малая погрѣшность въ R вызываетъ очень большую въ q , а, слѣдовательно, и въ n ; дѣйствительно, обозначимъ погрѣшность въ R черезъ ΔR , а въ q черезъ Δq , найдемъ:

$$\Delta q = \frac{2R}{(1-R)^2} \Delta R.$$

Чтобы яснѣе видѣть степень приложимости нашихъ простыхъ формулъ къ золоту, мы вычислили постоянныя изъ значеній для $\lambda_1 = 6,5$ и 20, а также для $\lambda_1 = 7,0$ и 25 и нашли:

$$A_0 = 22,20; \quad P = 1000,80; \quad Q = 12,320 \quad \text{и} \quad z^2 = 1169,10$$

для первой комбинаціи и

$$A_0 = 22,48; \quad P = 691,50; \quad Q = 7,840 \quad \text{и} \quad z^2 = 807,60$$

для второй. Разницы въ виду замѣченнаго выше понятны. Если-бы взяли за крайнія наблюденія для $\lambda_1 = 6,0$ и $\lambda_1 = 25,0$, то нашли-бы:

$$A_0 = 27,21; \quad P = 577,35; \quad Q = 6,142 \quad \text{и} \quad z^2 = 550,05.$$

Если возьмемъ среднія изъ этихъ и первыхъ (область 6,5 — 25,0), то получимъ для золота:

$$A = 26,42 - \frac{596,18 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 593,20}, \quad B = - \frac{6,521 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 593,20}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
6,0	7,69	8,32	2,238	2,264
6,5	13,22	12,65	2,818	2,792
7,0	19,07	16,91	3,483	3,139
8,0	31,64	26,72	5,080	3,841
10,0	59,58	47,35	9,407	9,250
12,0	90,03	77,83	15,285	12,390
15,0	137,53	127,73	26,898	22,370
20,0	213,69	232,90	52,524	62,830
25,0	279,45	279,77	88,640	85,510

На сколько послѣдняя формула даетъ результаты близкіе къ дѣйствительности, видно еще изъ слѣдующаго примѣра. Вычисливъ A и B для $\lambda_1 = 30,0$ (т. е. $3^{\mu},0$), получимъ: $A = -332,91$ и $B = -117,91$, а отсюда найдемъ:

$$n = 3,183 \quad \text{и} \quad nx = 18,52.$$

Экстраполированіе наблюденій Рубенса и Гагена даетъ $nx = 18,40$.

А если вычислимъ отражательную способность для этой волны, то найдемъ: $R = 96,5\%$, а прямые наблюденія Рубенса и Гагена ¹⁾ дали: $96,7\%$.

Мы рассмотрѣли инфракрасную область дисперсіи золота, что-же касается видимой или ультрафіолетовой, то здѣсь изъ наблюденій Рубенса и Гагена нельзя вывести значеній n , такъ какъ они получаются комплексными.

§ 16. Разсматривая кривую прозрачности золота по наблюденіямъ Гагена и Рубенса (An. d. Ph. Bd. 8, p. 450) или таблицу 4 (p. 447) можно приложить формулы § 7, разбивъ всѣ наблюденія на области отъ $\lambda_1 = 4,5$ до $8,0$, затѣмъ отъ 10 до 20 . Получаемъ для первой области ($4,5 - 8,0$):

$$A = 1 - \frac{0,2902 \cdot \lambda_1^2}{18,232 - \lambda_1^2} - \frac{20,595 \cdot \lambda_1^2}{110,876 - \lambda_1^2},$$

$$B = \frac{0,1086 \cdot \lambda_1^3}{18,232 - \lambda_1^2} - \frac{0,3267 \cdot \lambda_1^3}{110,876 - \lambda_1^2}.$$

Повѣрка даетъ слѣдующія результаты:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
4,5	0,692	0,692	5,229	5,249
5,0	3,924	2,814(?)	2,482	5,022(?)
5,5	5,997	5,145	2,178	2,260
6,0	8,314	8,317	2,263	2,264
6,5	11,168	12,650	2,549	2,943
7,0	14,847	16,910	3,022	3,172
8,0	26,710	26,720	4,783	4,783

¹⁾ Ann. d. Physik. Bd. 11, p. 881 (1903).

Если-бы опредѣлили R и сравнили-бы съ непосредственными наблюдениями Гагена и Рубенса, то получили-бы слѣдующую таблицу:

λ_1	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	8,0	(0 ^u , 1)
$R_{\text{выч.}}$	34,87	64,93	78,78	85,05	88,53	90,79	93,65	%
$R_{\text{наб.}}$	34,95	47,15	74,35	85,0	88,9	91,9	93,65.	

Опредѣленіе R , а также A и B для $\lambda_1 = 5,0$ должно быть ошибочно, ибо вычисленіе $g = n\kappa$ даетъ совершенно совпадающіе результаты, какъ видно изъ приводимыхъ чиселъ для такой-же длины волнъ:

$n\kappa$ выч.	1,727	2,075	2,487	2,912	3,363	3,873	5,189
$n\kappa$ наб.	1,73	2,07	2,32	2,91	3,58	4,13	5,19.

Предыдущая формула даетъ для $\lambda_1 = 4,2$ minimum прозрачности (maximum R), что видно изъ графики.

Для области 10—20 получаемъ:

$$A = 1 - \frac{0,566 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 199,67} - \frac{923,31 \cdot \lambda_1^2}{1986,67 - \lambda_1^2},$$

$$B = \frac{0,0259 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 199,67} - \frac{12,818 \cdot \lambda_1^3}{1986,67 - \lambda_1^2}.$$

Обратный расчетъ даетъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
10	47,372	47,35	7,254	7,050
12	69,689	77,83	12,824	12,39
15	121,95	127,73	21,162	22,10
20	232,90	232,90	65,66	63,60

Если-бы пожелали представить одной формулой всю область наблюдений (4,5 — 25,0), то это оказалось-бы не возможнымъ, ибо при $\lambda_1 = 8,5$ должно существовать сильное поглощеніе.

При этихъ вычисленіяхъ $n\kappa$ по A и B мы пользовались формулами:

$$\varepsilon = \frac{A}{B}, \quad \kappa = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 1}, \quad n^2 = -\frac{B}{2\kappa}$$

и следовательно,

$$nx = x \sqrt{-\frac{B}{2x}},$$

легко находимых изъ положений:

$$n^2(1 - x^2) = A; \quad 2n^2x = -B.$$

§ 17. *Платина.* Для платины наблюдения Рубенса и Гагена надъ R и $g = nx$ даютъ возможность вычислить n въ области $\lambda_1 = 6,5$ до $\lambda_1 = 12,0$, т. е. отъ 0,465 до 1,92. Для этой области получаются формулы:

$$A = 31,16 - \frac{72,53 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 31,17}, \quad B = -\frac{7,537 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 31,17}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
6,5	10,58	10,57	28,19	28,19
7,0	13,17	12,24	32,25	31,76
8,0	17,62	13,06	40,55	42,44
10,0	24,15	23,75	57,46	55,07
12,0	28,46	28,45	74,35	74,35
15,0	32,54	—	99,30	—
20,0	36,13	—	139,84	—
25,0	37,92	—	142,56	—

При помощи вычисленныхъ A и B для $\lambda_1 = 15$; 20 и 25 находимъ n и nx , а такъ какъ послѣднее можно экстраполировать изъ наблюдений Рубенса и Гагена, то имѣемъ еще возможность сравнить наши расчеты съ опытомъ. Имѣемъ для приведенныхъ трехъ волнъ:

выч. nx 8,28 9,50 9,63

наб. nx 8,93 11,10 13,0.

Точно также можно сравнить n , вычисленное по нашимъ формуламъ съ найденнымъ экстраполяціей наблюдений Рубенса и Гагена. Получаемъ:

Вычисл. n 6,00 9,26 9,32

Экстрал. n 6,18 8,11 10,14.

Эти числа говорятъ сами за себя.

§ 18. Применяя къ платинѣ наши электронныя формулы, найдемъ:

$$A = 1 - \frac{25.103. \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 48.70} - \frac{0.249. \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 140.32},$$

$$B = - \frac{9.299. \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 48.70} - \frac{0.024. \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 140.32},$$

причемъ для вычисленія постоянныхъ служили наблюденія Гагена и Рубенса для $\lambda_1 = 6,5$; $\lambda_1 = 8,0$ и $\lambda_1 = 12,0$.

Для обратной повѣрки вычислимъ $n\kappa = g$ для $\lambda_1 = 7$ и 10 .

Получаемъ для λ_1	7	10
$n\kappa$ вычисленное	4,80	6,33
$n\kappa$ наблюденное	4,81	6,47.

Для дальнѣйшей повѣрки экстраполируемъ $n\kappa$ для $\lambda_1 = 15$; 20 и 25. Найдемъ:

$n\kappa$ вычисленное	8,24	9,70	10,84
$n\kappa$ наблюденное	8,93	11,10	13,00.

Слѣдовательно и экстраполяція даетъ еще результаты достаточно удовлетворительные.

Болѣе удовлетворительные результаты получаются при вычисленіи $g = n\kappa$ для болѣе короткихъ волнъ.

Такъ для

λ_1	3,26	3,85	4,5	5,0	6,0
вычисленное $n\kappa$	2,23	2,69	3,175	3,53	3,53
наблюденное $n\kappa$	2,34	2,76	3,07	3,52	4,16.

Такимъ образомъ формула, вычисленная нами для платины, можетъ обнимать область дисперсіи отъ $\lambda_1 = 3,26$ до $\lambda_1 = 20$ или даже 25.

§ 19. *Серебро*. Возьмемъ сначала наблюденія Рубенса и Гагена въ области $0,42 - 1,45$. Имѣемъ рядъ значеній $n\kappa$ и R , по которымъ вычислимъ n ; находимъ:

λ_1	4,2	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	8,0	10,0	12,0	15,0
$n\kappa$	2,31	2,59	3,21	3,78	4,20	4,77	5,52	6,21	8,0	10,3	12,4
R	86,8	90,6	91,6	92,6	92,8	95,9	96,2	96,6	97,3	97,7	97,9
n	0,22	0,20	0,25	0,30	0,35	0,25	0,30	0,34	0,45	0,63	0,82.

Взявъ за основаніе наблюденія для $\lambda_1 = 4,2; 6,0$ и $15,0$, получимъ для дисперсіи серебра въ области $4,2 — 15,0$ ($0,^{\mu}42 — 1,^{\mu}5$), въ области видимой и инфракрасной, слѣдующія формулы:

$$A = 6,440 - 0,7435 \cdot \lambda_1^2 + \frac{12,765 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 145,07},$$

$$B = - \frac{2,231 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 145,07}.$$

Обратная повѣрка даетъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
4,2	5,291	5,288	1,016	1,016
4,5	7,052	6,668	1,230	1,036
5,0	10,271	10,240	1,640	1,605
5,5	13,848	14,200	2,167	2,268
6,0	17,788	17,520	2,661	2,940
6,5	22,093	22,690	3,271	2,385
7,0	26,769	30,380	3,943	3,312
8,0	37,236	38,440	5,464	4,222
10,0	62,701	63,770	9,316	7,680
12,0	94,261	105,690	13,340	12,980
15,0	153,084	153,090	20,350	20,340

Согласіе достаточное. Для дальнѣйшаго сравненія опредѣлимъ A и B для $\lambda_1 = 20,0$, найденнаго Рубенсомъ и Гагеномъ. Найдемъ:

$$A = -281,6; \quad B = -32,75,$$

а по наблюденію:

$$A = -232,1; \quad B = -33,02.$$

Если-бы отсюда опредѣлили n и $n\kappa$, то нашли-бы:

$$n = 0,974; \quad n\kappa = 16,81,$$

а Рубенсъ и Гагенъ нашли изъ опыта:

$$n = 1,140; \quad n\kappa = 15,90.$$

Область отъ $\lambda_1 = 4,5$ до $\lambda_1 = 15,0$ можно также представить слѣдующими простыми формулами:

$$A = 16,017 - \frac{516,53 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 462,22},$$

$$B = - \frac{4,141 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 462,22}.$$

Сравненіе вычисленій и наблюденій даетъ:

λ_1	$-A_{\text{выч.}}$	$-A_{\text{наб.}}$	$-A_{\text{выч.}}$	$-A_{\text{выч.}}$	$-A_{\text{наб.}}$	$-A_{\text{выч.}}$
4,5	5,662	5,657	—	0,782	0,782	—
5,0	10,846	8,362	—	1,062	0,976	—
5,5	15,710	10,945	—	1,399	1,166	—
6,0	24,828	15,641	—	2,063	1,607	—
6,5	27,240	22,69	22,70	2,254	2,385	2,385
7,0	33,48	30,38	29,52	2,779	3,312	2,931
8,0	46,803	38,44	43,95	4,029	4,223	4,224
10,0	75,888	63,770	74,80	7,368	7,680	7,621
12,0	106,680	105,690	106,67	11,804	12,978	12,045
15,0	153,10	153,09	153,04	20,337	20,336	20,332

Согласіе для B значительно больше, чѣмъ для A , какъ это и слѣдовало ожидать.

Если-бы область сѣзуили, взяли-бы на примѣръ отъ $\lambda_1 = 6,5$ до $\lambda_1 = 15,0$, то для B получили-бы еще большее согласіе, если-бы взяли:

$$A = 25,675 - \frac{474,00 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 371,73},$$

$$B = - \frac{3,595 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 371,83}.$$

Результаты помѣщены въ 4 и 7 столбцахъ предыдущей таблицы.

§ 20. Перейдемъ теперь къ наблюденіямъ Минора ¹⁾, въ области видимой части спектра ($\lambda_1 = 3,95$ до $\lambda_1 = 6,30$). Получимъ слѣдующія формулы:

$$A = 6,889 - \frac{86,912 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 113,417},$$

$$B = - \frac{0,9840 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 113,417}.$$

¹⁾ L. c. p. 617.

Замѣтимъ, что здѣсь коэффициентъ $A_0 = 6,889$ близокъ къ найденному въ первой формулѣ: $A_0 = 6,440$, а частное $\frac{P}{z^2} = 0,7663$, близко къ коэффициенту $k = 0,7435$ той-же формулы (§ 19).

Вычисления A и B даютъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
3,95	3,621	3,620	0,470	0,470
4,50	6,584	5,657	0,671	0,782
5,00	8,805	8,362	0,889	0,979
5,50	11,411	10,945	1,140	1,166
5,893	13,485	13,204	1,359	1,288
6,30	15,641	15,641	1,607	1,607

Согласіе достаточное. Если-бы за крайнія наблюденія взяли наблюденія для $\lambda_1 = 3,95$ и $\lambda_1 = 5,893$, то получили-бы:

$$A_0 = 7,828, \quad P = 66,320, \quad Q = 0,6892 \quad \text{и} \quad z^2 = 74,775.$$

близкія къ прежнимъ значеніямъ.

Если возьмемъ большую область, напримѣръ отъ $\lambda_1 = 3,29$ до $\lambda_1 = 5,893$, то получимъ по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$A = 4,037 - 0,5476 \cdot \lambda_1^2 + \frac{1,471 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + 0,4022},$$

$$B = - \frac{0,1752 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 + 0,4022}.$$

Сравненіе дасть слѣдующее:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
3,290	0,472	0,046	0,566	0,581
3,320	0,580	0,358	0,561	0,525
3,360	0,725	0,609	0,569	0,420
3,460	1,096	1,157	0,587	0,481
3,611	1,576	2,064	0,614	0,583
3,950	3,073	3,620	0,675	0,470
4,500	5,609	5,657	0,773	0,782
5,000	8,205	8,362	0,862	0,979
5,590	10,863	10,945	0,951	1,166
5,893	13,282	13,204	1,069	1,288
6,300	16,231	15,641	1,093	1,607

Вслѣдствіе малости x^2 можно брать приближенныя формулы:

$$A = 5,508 - 0,5476 \cdot \lambda_1^2, \quad B = -0,1752 \cdot \lambda_1^3.$$

Къ наблюденіямъ Минора мы присоединили еще одно наблюденіе Друде для $\lambda_1 = 6,3$.

Согласіе достаточное.

§ 21. Примѣненіе „электронныхъ формулъ“ къ серебру можетъ быть сдѣлано для области между двумя полосами поглощенія. Наблюденія Рубенса и Гагена надъ прозрачностью металловъ показываютъ, что для серебра поглощеніе лежитъ за длиною волны $\lambda_1 = 3,26$ въ области ультрафіолетовой. Поэтому воспользуемся наблюденіями Минора въ области $3,26 - 5,5$ ¹⁾. Получимъ слѣдующія формулы:

$$A = 1 - \frac{33,883 \cdot \lambda_1^2}{114,142 - \lambda_1^2} + \frac{0,627 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 9,438},$$

$$B = -\frac{0,5185 \cdot \lambda_1^3}{114,142 - \lambda_1^2} - \frac{0,01387 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 9,438}.$$

Сравненіе съ наблюденіями Минора даетъ слѣдующее:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
3,26	—0,323	—0,295	0,586	0,584
3,28	—0,031	—0,169	0,547	0,547
3,29	0,106	0,046	0,526	0,581
3,32	0,433	0,358	0,505	0,525
3,36	0,803	0,609	0,475	0,420
3,46	1,484	1,157	0,438	0,481
3,61	2,232	2,064	0,422	0,583
3,95	3,569	3,620	0,463	0,470
4,50	5,719	5,657	0,620	0,782
5,00	7,998	8,362	0,838	0,979
5,50	10,761	10,945	1,139	1,166
5,893	13,383	13,204	1,448	1,288

¹⁾ Строго говоря, наблюденія Гагена и Рубенса даютъ область отъ 3,21 до 7,0. Ann. d. Ph. 8, p. 446. (1902).

Вычисляя наблюдения Друде для $\lambda_1 = 6,3$, найдемъ:

$$A = -16,651 \text{ в.м.} - 15,641 \text{ и } B = -1,856 \text{ в.м.} - 1,607.$$

Наблюдения Гагена и Рубенса для области 6,0—15,0 даютъ слѣдующія формулы:

$$A = 1 - \frac{3045,25 \cdot \lambda_1^2}{4595,64 - \lambda_1^2} + \frac{2,458 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 20,06},$$

$$B = - \frac{23,460 \cdot \lambda_1^3}{4595,64 - \lambda_1^2} - \frac{0,1347 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 20,06}.$$

Сравненіе даетъ слѣдующіе результаты:

λ_1	$-A_{\text{выч.}}$	$-A_{\text{наб.}}$	$-B_{\text{выч.}}$	$-B_{\text{наб.}}$
6,0	17,493	17,517	2,936	2,940
6,5	22,606	22,690	3,082	2,385
7,0	27,658	30,380	3,367	3,312
8,0	38,418	38,449	4,220	4,223
10,0	63,664	63,770	6,903	7,680
12,0	94,652	105,690	10,984	12,980
15,0	153,072	153,088	20,333	20,336

Если воспользуемся наблюдениями Гагена и Рубенса въ области 3,26—5,5, то получимъ ¹⁾:

$$A = 1 + \frac{1,897 \cdot \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 6,12} - \frac{63,513 \cdot \lambda_1^2}{139,56 - \lambda_1^2},$$

$$B = - \frac{0,0292 \cdot \lambda_1^3}{\lambda_1^2 - 6,12} - \frac{1,354 \cdot \lambda_1^3}{139,56 - \lambda_1^2},$$

причемъ за основныя наблюдения взяли: 1) $\lambda_1 = 3,26$, $n = 0,449$, и $n = 0,661$, 2) $\lambda_1 = 4,2$ и 3) $\lambda_1 = 5,5$.

¹⁾ Принявъ за отражательную способность для $\lambda_1 = 3,26$ среднее изъ опредѣлений n , а именно 0,661. Тогда $A = +0,235$ и $B = -0,594$.

Сравненіе даетъ:

λ_1	— $A_{\text{выч.}}$	— $A_{\text{наб.}}$	— $B_{\text{выч.}}$	— $B_{\text{наб.}}$
3,26	—0,234	—0,235	0,588	0,594
3,38	0,573	0,673	0,621	0,444
3,57	1,730	1,600	0,687	0,499
3,85	3,314	3,121	0,811	0,769
4,20	5,284	5,288	1,011	1,016
4,50	7,061	6,668	1,223	1,036
5,00	10,347	10,240	1,668	1,605
5,50	14,197	14,200	2,263	2,268
6,00	18,793	17,520	3,035	2,940

Для короткихъ волнъ согласіе меньшее, чѣмъ для длинныхъ; причина въ малой точности опредѣленія R .

§ 22. Обзорѣвая предыдущее, можно утверждать, что и при настоящемъ, неполномъ, знаніи дисперсіи металловъ формулы нашей теоріи въ самой простой формѣ въ достаточной степени удовлетворяютъ наблюденіямъ. Дальнѣйшія наблюденія дадутъ безъ сомнѣнія еще больше данныхъ для подтвержденія предлагаемыхъ формулъ.

Въ заключеніе должно присоединить слѣдующее. Настоящая работа была уже закончена, какъ появилась статья Друде (Ann. d. Ph. Bd. 14, p. 936), въ которой онъ получаетъ нѣкоторые выводы изъ своей „электронной теоріи“ металловъ; между тѣмъ какъ повѣрка его формулъ, какъ показано мной выше, приводитъ къ отрицательному результату въ нѣкоторыхъ случаяхъ; это обстоятельство подрываетъ значеніе полученныхъ Друде выводовъ.

Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы.

В. П. Ермакова.

1. Предисловіе.

Въ XXIV томѣ Математическаго Сборника помѣщенъ мемуаръ А. Н. Коркина подъ заглавіемъ: *Изысканіе о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка* ¹⁾. Въ этомъ мемуарѣ Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Въ дифференціальномъ уравненіи:

$$Mdx + Ndy = 0$$

M и N суть цѣлыя однородныя функціи относительно y ; требуется найти самое общее выраженіе этихъ функцій подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе имѣло данный интегральный множитель:

$$(y - u_1)^{2_1} (y - u_2)^{2_2} \dots (y - u_n)^{2_n}.$$

Многіе математики пробовали рѣшать эту задачу раньше, но изслѣдовали только частные случаи. Коркину удалось показать, что полное рѣшеніе задачи всегда можетъ быть найдено въ конечной формѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Сверхъ того Коркинъ указалъ тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ ни опредѣленныхъ интеграловъ, ни квадратуръ. Всякій согласится съ тѣмъ, что этотъ результатъ огромной важности. Однако изслѣдованіе Коркина слишкомъ длинно (220 страницъ) и переполнено массою формулъ. Я увѣренъ, что

¹⁾ Этотъ мемуаръ въ 1902 году изданъ на французскомъ языкѣ отдѣльной брошюрой подъ заглавіемъ: „Etudes des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre“. St. Pétersbourg.

немногіе изъ математиковъ прочтутъ этотъ мемуаръ, и цѣнный результатъ Коркина можетъ исчезнуть безслѣдно. Но я знакомъ съ прежними изслѣдованіями Коркина и знаю, что всѣ его работы имѣютъ высокій интересъ. Вотъ почему я употребилъ всѣ усилія, чтобы познакомиться и съ настоящимъ мемуаромъ. Въ результатѣ оказалось, что все изслѣдованіе Коркина можно изложить въ очень краткой и ясной формѣ.

Коркинъ замѣчаетъ, что рѣшеніе задачи приводится къ интегрированію такой системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій болѣе числа уравненій. Можно ли изъ этой системы при помощи алгебраическихъ операций и дифференцированій выдѣлить опредѣленную систему дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій равнялось бы числу уравненій? Первая глава мемуара Коркина содержитъ рѣшеніе этого вопроса. Особенно много хлопотъ доставилъ Коркину тотъ случай, когда сумма показателей интегральнаго множителя — цѣлое отрицательное число. Это изслѣдованіе можно сильно упростить, если предварительно доказать двѣ общія очень простыя теоремы. Первая изъ этихъ теоремъ (§ 3) показываетъ, что данную задачу можно замѣнить другою, въ которой нѣкоторые показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлые числа. Вторая теорема (§ 5) показываетъ, что самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ. Послѣ этихъ теоремъ становятся ненужными всѣ сложныя формулы первой главы мемуара Коркина. Въ остальныхъ двухъ главахъ Коркинъ показываетъ, какимъ образомъ полное рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленнымъ интеграламъ. Массу преобразованій нужно выполнить, чтобы въ результатѣ получились интегралы, имѣющіе конечное значеніе. Между тѣмъ всѣ эти преобразованія очень просто вытекаютъ изъ вышеупомянутыхъ теоремъ.

Смѣю думать, что мнѣ удалось изложить цѣнные результаты А. Н. Коркина въ простой и ясной формѣ. Надѣюсь, что въ такой формѣ рѣшеніе задачи Коркина займетъ видное мѣсто въ курсахъ дифференціальныхъ уравненій.

2. Постановка задачи и основная теорема.

Пусть M и N означаютъ нѣкоторыя цѣлыя алгебраическія функціи переменнаго y ; коэффициенты у этихъ многочленовъ суть функціи переменнаго x . Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \quad (1)$$

имѣю интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^{\alpha_1} (y - u_2)^{\alpha_2} \dots (y - u_n)^{\alpha_n}. \quad (2)$$

Здѣсь показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть числа постоянныя, u_1, u_2, \dots, u_n суть функции переменнаго x .

Для этой цѣли, какъ извѣстно, должно удовлетворяться слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \log R}{\partial y}. \quad (3)$$

Подставивъ вмѣсто R его выраженіе (2), мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \sum \frac{\alpha_i (M + Nu'_i)}{y - u_i}. \quad (4)$$

Это уравненіе должно удовлетворяться при произвольныхъ значеніяхъ y . Положимъ y равенъ u_i . Вторая часть уравненія (4) не должна обращаться въ безконечность; поэтому $M(y) + N(y)u'_i$ должно дѣлиться безъ остатка на $y - u_i$. Чтобы выполнялось это условіе, должно имѣть мѣсто равенство:

$$M(u_i) + N(u_i)u'_i = 0. \quad (5)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если выраженіе (2) будетъ интегральнымъ множителемъ дифференціальнаго уравненія (1), то u_1, u_2, \dots, u_n будутъ частными интегралами того же дифференціальнаго уравненія (1).

3. Повышеніе показателей въ интегральномъ множителѣ.

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$F(y) = (y - u_1)(y - u_2) \dots (y - u_n), \quad (6)$$

$$F_1(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + 1)}{y - u_i}, \quad (7)$$

$$F_2(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + 1)u'_i}{y - u_i}. \quad (8)$$

Положимъ, что мы нашли самое общее рѣшеніе задачи, указанной въ § 2. Пусть уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Мы можемъ составить весьма простое уравненіе, которое имѣетъ тотъ же интегральный множитель (2). Пусть V обозначаетъ произвольную функцію переменнаго x . Разсмотримъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d(VF(y)R(y)) = 0.$$

Это уравненіе, по сокращеніи на R , приметъ слѣдующую форму:

$$\left(F(y) \frac{\partial V}{\partial x} - VF_2(y) \right) dx + VF_1(y) dy = 0. \quad (9)$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (9) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M(y) - F(y) \frac{\partial V}{\partial x} + VF_2(y) \right) dx + \left(N(y) - VF_1(y) \right) dy = 0. \quad (10)$$

Это послѣднее дифференціальное уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Можно подобрать V такъ, чтобы функція, стоящая при dy въ уравненіи (10), дѣлилась безъ остатка на $y - u_1$.

Для этой цѣли нужно положить

$$V = \frac{N(u_1)}{F_1(u_1)}. \quad (11)$$

Замѣтимъ теперь, что по теоремѣ § 2 $y = u_1$ должно быть частнымъ интеграломъ уравненія (10), а такъ какъ функція, стоящая при dy дѣлится на $y - u_1$, то и остальное выраженіе должно дѣлиться на $y - u_1$. Итакъ, если V опредѣлимъ формулой (11), то дифференціальное уравненіе (10) содержитъ множитель $y - u_1$. Положимъ

$$\bar{M}(y) = \frac{M(y) - F(y) \frac{\partial V}{\partial x} + F_2(y) V}{y - u_1}, \quad \bar{N}(y) = \frac{N(y) - VF_1(y)}{y - u_1}. \quad (12)$$

Такъ опредѣленныя функціи будутъ цѣлыми относительно y . Отсюда слѣдуетъ, что дифференціальное уравненіе:

$$\bar{M}(y) dx + \bar{N}(y) dy = 0 \quad (13)$$

имѣетъ интегральнымъ множителемъ

$$(y - u_1) R(y) = (y - u_1)^{r_1+1} (y - u_2)^{r_2} \dots (y - u_n)^{r_n}. \quad (14)$$

Итакъ, если намъ извѣстно общее рѣшеніе первоначальной задачи, то мы можемъ найти общее рѣшеніе другой задачи: мы можемъ составить такое дифференціальное уравненіе (13), интегральнымъ множителемъ котораго должно быть выраженіе (14).

Наши формулы не годятся въ одномъ только случаѣ, когда α_1 равно — 1. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ формулы (7) слѣдуетъ, что $F_1(u_1) = 0$; тогда, по формулѣ (11), V не имѣетъ конечнаго значенія.

Обратно, если мы знаемъ общее рѣшеніе второй задачи, то легко можемъ найти и общее рѣшеніе первой задачи. Для этой цѣли изъ уравненій (12) имѣемъ:

$$\begin{aligned} M(y) &= (y - u_1) M(y) + F(y) \frac{\partial V}{\partial x} - VF_2(y), \\ N(y) &= (y - u_1) N(y) + VF_1(y). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ общее рѣшеніе первой задачи. Въ формулахъ (15) V должно быть произвольною функціей перемѣннаго x .

Итакъ, рѣшеніе нашей задачи мы всегда можемъ свести къ рѣшенію другой задачи, въ которой одинъ изъ показателей интегральнаго множителя увеличенъ на 1. Всякій показатель можетъ быть увеличенъ на 1, за исключеніемъ показателя равнаго — 1.

Повторяя указанный процессъ нѣсколько разъ, мы можемъ привести рѣшеніе нашей задачи къ рѣшенію новой задачи, въ которой показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлыя числа. Но при этомъ нужно соблюдать слѣдующую предосторожность: *чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ положительное число.*

Такимъ образомъ рѣшеніе данной задачи мы можемъ легко вывести изъ рѣшенія другой задачи:

Найти общую форму дифференціального уравненія:

$$M_1(y)dx + N_1(y)dy = 0 \quad (16)$$

такъ, чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе:

$$R_1(y) = (y - u_1)^{\alpha_1 + m_1} (y - u_2)^{\alpha_2 + m_2} \dots (y - u_n)^{\alpha_n + m_n}, \quad (17)$$

гдѣ m_1, m_2, \dots, m_n суть нѣкоторыя цѣлыя положительные числа.

Покажемъ, какъ изъ общаго рѣшенія начальной задачи получается общее рѣшеніе послѣдней задачи, и обратно.

Положимъ, что начальная задача рѣшена, что мы умѣемъ составить общее выраженіе дифференціальнаго уравненія (1) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Составимъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d(F(y)R(y)\Phi(y)) = 0,$$

здѣсь $\Phi(y)$ есть нѣкоторая цѣлая функція переменнаго y съ неопредѣленными коэффициентами: степень этой функціи будетъ опредѣлена далѣе. По раздѣленіи на $R(y)$ послѣднее уравненіе принимаетъ слѣдующую форму:

$$\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x} - F_2\Phi\right)dx + \left(F\frac{\partial\Phi}{\partial y} + F_1\Phi\right)dy = 0. \quad (18)$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (18) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M - F\frac{\partial\Phi}{\partial x} + F_2\Phi\right)dx + \left(N - F\frac{\partial\Phi}{\partial y} - F_1\Phi\right)dy = 0. \quad (19)$$

Это уравненіе также имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Попробуемъ опредѣлить коэффициенты цѣлой функціи $\Phi(y)$ такъ, чтобы выраженіе:

$$N(y) - F(y)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y} - F_1(y)\Phi(y) \quad (20)$$

дѣлилось безъ остатка на

$$(y - u_1)^{m_1}(y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n}. \quad (21)$$

Выполняя это условіе, мы придемъ къ $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ линейнымъ алгебраическимъ уравненіямъ относительно коэффициентовъ функціи $\Phi(y)$; поэтому мы можемъ предположить, что степень $\Phi(y)$ равна $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$. Линейныя алгебраическія уравненія, о которыхъ только что была рѣчь, легко могутъ быть составлены. Далѣе является вопросъ: имѣютъ ли эти уравненія конечное рѣшеніе. Если бы мы стали излѣдовать этотъ вопросъ въ общемъ видѣ, то пришли бы къ сложнымъ формуламъ. Между тѣмъ изложенный выше послѣдовательный процессъ повышенія одного показателя на единицу показываетъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ конечности рѣшенія является

сказанное выше ограничение: чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ число положительное.

Если мы подберемъ коэффициенты функцій $\Phi(y)$ такъ, чтобы функція (20) имѣла множителемъ выраженіе (21), то легко докажемъ, что уравненіе (19) также будетъ имѣть множителемъ выраженіе (21). Послѣ этого положимъ:

$$\begin{aligned} M &= F \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_2 \Phi \\ M_1 &= \frac{M - F \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_2 \Phi}{(y - u_1)^{m_1} (y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n}}, \\ N &= F \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_1 \Phi \\ N_1 &= \frac{N - F \frac{\partial \Phi}{\partial y} - F_1 \Phi}{(y - u_1)^{m_1} (y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Такъ опредѣленныя функціи M_1 и N_1 будутъ цѣлыми относительно y . Подставивъ найденныя выраженія (22) въ уравненіе (16), получимъ самую общую форму такого дифференціального уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (17).

Положимъ теперь, обратно, что мы имѣемъ общее рѣшеніе послѣдней задачи; покажемъ, какъ тогда находится общее рѣшеніе начальной задачи.

Предположимъ, что мы умѣемъ составить самую общую форму дифференціального уравненія (16) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (17). Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (22) находимъ:

$$\begin{aligned} M &= F \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_2 \Phi + M_1 (y - u_1)^{m_1} (y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n}, \\ N &= F \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_1 \Phi + N_1 (y - u_1)^{m_1} (y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставивъ найденныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ самое общее рѣшеніе начальной задачи. Въ формулахъ (23) коэффициенты функцій $\Phi(y)$ будутъ уже произвольными функціями переменнаго x .

4. Рѣшеніе задачи въ томъ случаѣ, когда всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя отрицательныя.

Предположимъ, что дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), въ которомъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа.

Полный интегралъ дифференціального уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y) N(y) dy + \psi(x) = C.$$

Здѣсь мы имѣемъ интегралъ отъ алгебраической функціи. Такой интегралъ, какъ извѣстно, выражается въ алгебраической формѣ съ соединеніемъ нѣсколькихъ логарифмовъ:

$$F(y) R(y) \Theta(y) + \sum A_i \log(y - u_i) = C.$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть произвольная цѣлая алгебраическая функція переменнаго y , коэффициенты этой функціи суть произвольныя функціи переменнаго x . Функція $F(y)$ дана формулой (6). Такъ какъ производная отъ первой части по переменному x не должна содержать логарифмовъ, то A_1, A_2, \dots, A_n должны быть постоянными числами. Дифференцируемъ это уравненіе и дѣлимъ на $R(y)$; получаемъ:

$$\left(F \frac{\partial \Theta}{\partial x} - F_2 \Theta - R^{-1} \sum \frac{A_i U'_i}{y - u_i} \right) dx + \left(F \frac{\partial \Theta}{\partial y} + F_1 \Theta + R^{-1} \sum \frac{A_i}{y - u_i} \right) dy = 0.$$

Входящія сюда функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ даются формулами (7) и (8).

Въ такой формѣ выражается общее рѣшеніе нашей задачи; оно содержитъ произвольную функцію $\Theta(y)$ и произвольныя постоянныя A_1, A_2, \dots, A_n .

5. Приведеніе общей задачи къ простѣйшей формѣ.

Напомнимъ, что наша задача заключается въ нахожденіи общей формы дифференціального уравненія (1), такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Не давая самаго общаго рѣшенія задачи, мы можемъ, однако, составить дифференціальное уравненіе, заключающее произвольную функцію, такъ чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе (2).

Пусть $\Theta(y)$ выражаетъ произвольную цѣлую функцію относительно y ; коэффициенты этого многочлена суть произвольныя функціи переменнаго x . Разсмотримъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d(F(y) R(y) \Theta(y)) = 0.$$

Сокративъ на $R(y)$, мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\left(F \frac{\partial \Theta}{\partial x} - F_2 \Theta \right) dx + \left(F \frac{\partial \Theta}{\partial y} + F_1 \Theta \right) dy = 0. \quad (24)$$

Входящія сюда функціи $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ даны формулами (6), (7) и (8).

Интегральнымъ множителемъ уравненія (24) будетъ выраженіе (2). Само собою разумѣется, что дифференціальное уравненіе (24) не заключаетъ въ себѣ всѣхъ рѣшеній нашей задачи. Но пользуясь этимъ уравненіемъ, мы можемъ упростить нашу задачу. Вычтемъ уравненіе (24) изъ уравненія (1); въ результатѣ получимъ дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (2). Произвольную функцію $\Theta(y)$ можно подобрать такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ понизилась степень функціи при dy . Это пониженіе можно довести до $n - 2$. Предположимъ, что степень $N(y)$ превосходитъ $n - 2$; пусть эта степень равна $n - 1 + m$, причемъ m есть число положительное или нуль. Пусть

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \dots$$

Чтобы достигнуть пониженія, положимъ степень функціи $\Theta(y)$ равную m ; напишемъ эту функцію съ произвольными коэффициентами:

$$\Theta(y) = r_0 y^m + r_1 y^{m-1} + \dots$$

Вычитая уравненіе (24) изъ уравненія (1), мы понизимъ степень $N(y)$, если положимъ:

$$q_0 = \frac{r_0}{\sum \alpha + m}.$$

Пониженіе невозможно, если $\sum \alpha + m = 0$. Такимъ образомъ у насъ появился исключительный случай, когда сумма показателей интегрального множителя равна цѣлому отрицательному числу или нулю. Этотъ исключительный случай можетъ быть разрѣшенъ слѣдующимъ приемомъ.

Въ § 4 мы рассмотрѣли тотъ случай, когда всѣ показатели интегрального множителя суть цѣлыя отрицательныя числа. Теперь мы рассматриваемъ тотъ случай, когда не всѣ показатели суть цѣлыя отрицательныя числа. Въ такомъ случаѣ, по доказанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой тѣ показатели, которые не суть цѣлыя отрицательныя числа, могутъ

быть увеличены на произвольныя цѣлыя числа. Такимъ пріемомъ можно всегда устранить указанный выше исключительный случай.

Итакъ, мы можемъ ограничиться такимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, въ которомъ степень $N(y)$ равна $n - 2$. Тогда изъ уравненія (4) слѣдуетъ, что степень $M(y)$ равна $n - 1$. Задачу въ такой формѣ мы назовемъ *простѣйшею задачею Коркина*.

Покажемъ, къ чему приводится рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Пусть

$$M(y) = p_0 y^{n-1} + p_1 y^{n-2} + \dots + p_{n-1}, \quad (25)$$

$$N(y) = q_0 y^{n-2} + q_1 y^{n-3} + \dots + q_{n-2}. \quad (26)$$

Задача приводится къ опредѣленію $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, \dots, q_{n-2}$, какъ функцій отъ x , такъ чтобы дифференціальное уравненіе (1) имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе (2).

Прежде всего изъ уравненія (5) мы опредѣлимъ p_0, p_1, \dots, p_{n-1} линейно черезъ q_0, q_1, \dots, q_{n-2} . Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (4) и сравнивъ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ y ¹⁾, мы получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ функцій q_0, q_1, \dots, q_{n-2} систему $n - 1$ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Назовемъ эту систему *дифференціальными уравненіями Коркина*. Цѣль нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій состоитъ въ томъ, чтобы показать, что дифференціальныя уравненія Коркина могутъ быть проинтегрированы въ конечномъ видѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Здѣсь же обратимъ наше вниманіе на то, что интегралы будутъ содержать $n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Положимъ, что мы рѣшили простѣйшую задачу Коркина. Чтобы рѣшить самую общую задачу, нужно къ найденному дифференціальному уравненію прибавить дифференціальное уравненіе (24), въ которомъ $\Theta(y)$ есть цѣлая алгебраическая функція относительно y произвольной степени; коэффициенты этой функціи будутъ произвольными функціями переменнаго x . Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

¹⁾ Не слѣдуетъ забывать, что $\frac{M + Nu'_i}{y - u_i}$ есть цѣлая функція переменнаго y .

6. Интегралъ дифференціальныхъ уравненій Коркина, когда одинъ изъ показателей интегральнаго множителя есть цѣлое отрицательное число.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интегралъ дифференціального уравненія можетъ быть выраженъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y) N(y) dy + \psi(x) = C.$$

Положимъ, что одинъ изъ показателей интегральнаго множителя (2) есть цѣлое отрицательное число, $\alpha_i = -m$. Въ такомъ случаѣ подынтегральная функція (27) можетъ быть приведена къ слѣдующей формѣ:

$$R(y) N(y) = \frac{L_m}{(y - u_i)^m} + \frac{L_{m-1}}{(y - u_i)^{m-1}} + \dots + \frac{L_1}{y - u_i} + \psi(y),$$

гдѣ $\psi(y)$ не обращается въ безконечность, если положимъ $y = u_i$. Взявъ интегралы, получимъ:

$$\begin{aligned} \int R(y) N(y) dy &= \int \psi(y) dy - \frac{L_m}{(m-1)(y - u_i)^{m-1}} - \\ &- \frac{L_{m-1}}{(m-2)(y - u_i)^{m-2}} - \dots + L_1 \log(y - u_i). \end{aligned}$$

Производная отъ этой функціи по переменному x не должна содержать логарисма, потому что эта производная должна быть равна $R(y) M(y) = f'(x)$. Но въ такомъ случаѣ коэффициентъ L_1 долженъ быть постояннымъ. Чтобы найти L_1 , нужно отъ выраженія $(y - u_i)^m R(y) N(y)$ взять производную порядка $m-1$ по переменному y , подставить $y = u_i$ и раздѣлить на $1.2.3 \dots (m-1)$.

Такимъ образомъ должно имѣть мѣсто слѣдующее уравненіе:

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y_{m-1}} (y - u_i)^m R(y) N(y) \right|_{y=u_i} = A_i; \quad (28)$$

во второй части стоитъ произвольное постоянное.

Если въ уравненіе (28) вмѣсто $N(y)$ подставимъ его выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интеграль дифференціальнахъ уравненій Коркина ¹⁾. Такихъ интеграловъ можно найти столько, сколько есть цѣлыхъ отрицательныхъ показателей въ интегральномъ множителѣ (2).

7. Нахожденіе полной системы интеграловъ дифференціальнахъ уравненій Коркина.

Положимъ, что въ интегральномъ множителѣ, кромѣ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$, остальные показатели суть цѣлыя отрицательныя числа.

Прежде всего по приему, указанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ увеличены на нѣкоторыя положительныя числа.

Такимъ приемомъ можно достигнуть того, чтобы показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ были положительны. Если же въ самомъ общемъ случаѣ эти показатели мнимые, то мы можемъ достигнуть того, чтобы ихъ дѣйствительныя части были положительны.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интеграль дифференціального уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int_{u_1}^y R(y) N(y) dy = C. \quad (29)$$

Чтобы уѣдиться въ этомъ, стоитъ только продифференцировать это уравненіе; тогда, если примемъ во вниманіе уравненіе (3), по сокращенію на $R(y)$, получимъ дифференціальное уравненіе (1).

Въ § 2 было показано, что u_2, u_3, \dots, u_μ суть частныя интегралы дифференціального уравненія (1), поэтому должны имѣть мѣсто такія уравненія:

$$\int_{u_1}^{u_j} R(y) N(y) dy = A_j, \quad (30)$$

($j = 2, 3, \dots, \mu$)

Величины, стоящія во второй части, суть произвольныя постоянныя. Если, какъ сказано выше, дѣйствительныя части показателей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ положительны, то опредѣленные интегралы (30) имѣютъ конечное значеніе.

Если въ уравненія (30) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интегралы дифференціальнахъ уравненій Коркина.

¹⁾ Можетъ случиться, что выраженіе (28) въ первой части тождественно обратится въ нуль при произвольныхъ q_0, q_1, \dots, q_{n-2} . Такой случай невозможенъ, если $m < n$: поэтому этого случая можно избѣжать повышеніемъ показателя α_1 .

Такимъ пріемомъ нельзя получить всѣхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина. Въ уравненіи (29) нельзя положить $y = u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \dots$, потому что тогда опредѣленные интегралы не будутъ имѣть конечнаго значенія. Но такъ какъ показатели $\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа, то остальные интегралы находятся пріемомъ, указаннымъ въ § 6:

$$\left| \frac{\partial^{-\alpha_j-1}}{\partial y^{-\alpha_j-1}} (y - u_j)^{-\alpha_j} R(y) N(y) \right|_{y=u_j} = A_j. \quad (31)$$

$$(j = \mu+1, \mu+2, \dots, n).$$

Если въ уравненія (30) и (31) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ полную систему интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина.

Въ уравненія (5), (30) и (31) вмѣсто $M(y)$ и $N(y)$ подставимъ ихъ выраженія (25) и (26); рѣшимъ полученныя уравненія относительно $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, \dots, q_{n-2}$; подставимъ найденныя функціи въ формулы (25) и (26); въ результатѣ найдемъ полное рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Изъ полного рѣшенія простѣйшей задачи можно найти рѣшеніе общей задачи пріемомъ, указаннымъ въ § 5.

Этимъ наше изслѣдованіе закончено. Остается указать тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Положимъ, что всѣ показатели суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя. Тогда интегралы (30), какъ интегралы отъ рациональной функціи, могутъ быть выражены черезъ алгебраическія функціи и черезъ логариомы. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечномъ видѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя.

Положимъ теперь, что всѣ показатели, кромѣ одного, напримѣръ α_1 , суть положительныя цѣлыя числа. Тогда подъ знаками интеграловъ (30) имѣемъ произведеніе изъ цѣлой алгебраической функціи на $(y - u_1)^{\alpha_1}$. Такой интегралъ можетъ быть также выраженъ произведеніемъ цѣлой алгебраической функціи на $(y - u_1)^{\alpha_1}$. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечной формѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя, за исключеніемъ одного, суть положительныя цѣлыя числа.

Можно указать еще другіе случаи, когда опредѣленные интегралы могутъ быть найдены.

Положимъ, что одинъ показатель есть число дробное, $\alpha_1 = \frac{\mu}{r}$, всѣ же остальные показатели суть положительные или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованиемъ $y - u_1 = z^r$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ рациональной функціи.

Положимъ, что два показателя α_1 и α_2 суть дробныя числа со знаменателемъ 2, всѣ же остальные показатели суть положительные или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованиемъ $y - u_1 = z^2(y - u_2)$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ рациональной функціи.

8. Дополненіе къ § 3.

Въ § 3 было показано, что рѣшеніе одной задачи можетъ быть найдено изъ рѣшенія второй задачи, въ которой показатели интегрального множителя увеличены нѣкоторыми положительными числами, но окончательный результатъ не приведенъ къ простѣйшей формѣ. Результатъ выраженъ въ слѣдующей формѣ: если дифференціальное уравненіе (16) умножимъ на нѣкоторый множитель и прибавимъ къ уравненію (18), то получимъ общее рѣшеніе начальной задачи. Но и дифференціальное уравненіе (16), въ самомъ общемъ выраженіи, содержитъ цѣлую функцію произвольной степени съ произвольными коэффициентами; уравненіе (18) также содержитъ цѣлую функцію $\Phi(y)$ данной степени съ произвольными коэффициентами. Отсюда вытекаетъ такое заключеніе, что какъ будто общее рѣшеніе начальной задачи содержитъ двѣ функціи съ произвольными коэффициентами. Покажемъ, что эти двѣ функціи всегда такъ комбинируются, что онѣ могутъ быть замѣнены одною произвольною функціей.

Начальная задача такова:

Найти самое общее выраженіе дифференціального уравненія:

$$M(y)dx + N(y)dy = 0, \quad (1)$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R(y) = (y - u_1)^{\alpha_1} (y - u_2)^{\alpha_2} \dots (y - u_n)^{\alpha_n}. \quad (2)$$

Было показано, что рѣшеніе этой задачи можетъ быть получено изъ общаго рѣшенія слѣдующей задачи:

Найти самое общее выраженіе дифференціального уравненія:

$$M_1(y)dx + N_1(y)dy = 0, \quad (16)$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R_1(y) = (y - u_1)^{z_1+m_1} (y - u_2)^{z_2+m_2} \dots (y - u_n)^{z_n+m_n}, \quad (17)$$

въ которомъ m_1, m_2, \dots, m_n суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Положимъ, что простѣйшее рѣшеніе второй задачи выражается уравненіемъ (16). Чтобы найти самое общее рѣшеніе второй задачи, нужно, какъ показано въ § 5, къ уравненію (16) прибавить уравненіе:

$$\left(F \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \bar{F}_2 \Theta \right) dx + \left(F \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \bar{F}_1 \Theta \right) dy = 0, \quad (32)$$

въ которомъ $\Theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффициентами. Входящія сюда функціи $F_1(y)$ и $\bar{F}_2(y)$ должны быть опредѣлены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\bar{F}_1(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + m_i + 1)}{y - u_i}, \quad \bar{F}_2(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + m_i + 1) u_i'}{y - u_i}.$$

Если мы сумму уравненій (16) и (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію:

$$\left(F \frac{\partial \Phi}{\partial x} - F_2 \Phi \right) dx + \left(F \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_1 \Phi \right) dy = 0, \quad (18)$$

то получимъ, какъ было показано въ § 3, самое общее рѣшеніе начальной задачи.

Если уравненіе (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію (18), то легко показать, что въ результатѣ получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(F \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - F_2 \Theta_1 \right) dx + \left(F \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + F_1 \Theta_1 \right) dy = 0, \quad (33)$$

въ которомъ

$$\Theta_1(y) = \Phi(y) + \frac{R_1(y)}{R(y)} \Theta(y).$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующій результатъ:

Если мы дифференціальное уравненіе, соответствующее простѣйшему рѣшенію второй задачи, умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію (33), въ которомъ $\Theta_1(y)$ есть цѣлая функція произвольной сте-

пени съ произвольными коэффициентами, то въ результатъ получимъ самое общее рѣшеніе первой задачи.

Такимъ образомъ снова подтверждается, что рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ случаѣ содержитъ только одну произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

Напомнимъ здѣсь, что найденное такимъ приемомъ рѣшеніе первой задачи только въ томъ случаѣ будетъ самымъ общимъ, а не частнымъ рѣшеніемъ, когда выполняется требованіе, найденное въ § 3: чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель интегральнаго множителя (2) не превращался ни въ нуль, ни въ положительное число въ интегральномъ множитель (17).

9. Интегральный множитель $(y - u)^2$.

Разсмотримъ простѣйшій случай задачи.

Требуется найти самую общую форму дифференціального уравненія первой порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y - u)^2$.

Изъ сказаннаго въ § 5 слѣдуетъ, что нужно составить такое дифференціальное уравненіе:

$$d((y - u)^{\alpha+1} \Theta(y)) = 0.$$

Раздѣливъ на $(y - u)^{\alpha}$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе:

$$\left((y - u) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - (\alpha + 1) u' \Theta \right) dx - \left((y - u) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + (\alpha + 1) \Theta \right) dy = 0. \quad (35)$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффициентами.

Въ томъ случаѣ, когда α есть цѣлое отрицательное число найденное рѣшеніе не будетъ общимъ рѣшеніемъ. Тогда, какъ показано въ § 4, уравненіе (31) должно быть замѣнено слѣдующимъ:

$$d\{(y - u)^{\alpha+1} \Theta(y) + A \log(y - u)\} = 0.$$

Раздѣливъ на $(y - u)^{\alpha}$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned} & \left((y - u) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - (\alpha + 1) u' \Theta - A u' (y - u)^{-\alpha-1} \right) dx + \\ & + \left((y - u) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + (\alpha + 1) \Theta + A (y - u)^{-\alpha-1} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Здѣсь A есть произвольное постоянное.



Томъ IX, № 1.

СОДЕРЖАНІЕ.

	Стран.
Дисперсія металловъ. <i>А. П. Грузинцева</i>	1
Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы. <i>В. П. Ермакова</i> .	33

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества

издаются подъ редакціею распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шестъ выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

	Pages.
Sur la dispersion des métaux; par <i>A. Grousintzeff</i>	1
Sur les équations différentielles du premier ordre admettant un multiplicateur de la forme factorielle; par <i>M. W. Ermakoff</i>	33

Communications de la Société mathématique de Kharkow.

2-e série, Tome IX, № 2.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 2.

ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.

(Рыбная улица, домъ № 30-й).

1905.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

10. Интегральный множитель $(y - u)^{\alpha} (y - v)^{\beta}$.

Рѣшимъ здѣсь слѣдующую задачу:

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y - u)^{\alpha} (y - v)^{\beta}$.

Разсмотримъ тотъ случай, когда дѣйствительныя части показателей α и β положительны. Простѣйшая задача Коркина, какъ показано въ § 5, приводится къ дифференціальному уравненію:

$$(py + p_1)dx + qdy = 0.$$

Задача приводится къ нахожденію трехъ функцій p , p_1 и q . На основаніи уравненій (5) имѣемъ:

$$\begin{aligned} pu + p_1 + q u' &= 0, \\ pv + p_1 + q v' &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Изъ § 7 слѣдуетъ, что q опредѣляется изъ уравненія:

$$q \int_u^v (y - u)^{\alpha} (y - v)^{\beta} dy = A. \tag{38}$$

Сдѣлаемъ въ этомъ интегралѣ замѣну переменнаго:

$$y = u + z(v - u);$$

имѣемъ:

$$\int_u^v (y - u)^{\alpha} (y - v)^{\beta} dy = (v - u)^{\alpha + \beta + 1} \int_0^1 z^{\alpha} (z - 1)^{\beta} dz.$$

Опредѣленный интегралъ второй части имѣетъ постоянную величину, на которую мы можемъ раздѣлить произвольное постоянное A . Итакъ, мы можемъ положить

$$q = A(v - u)^{-\alpha - \beta - 1}.$$

Подставивъ найденное выраженіе въ уравненія (37), изъ рѣшенія этихъ уравненій найдемъ:

$$\begin{aligned} p &= A(v - u)^{-\alpha - \beta - 2}(v' - u'), \\ p_1 &= A(v - u)^{-\alpha - \beta - 2}(vu' - uv'). \end{aligned}$$

Подставивъ найденныя значенія p , p_1 и q въ уравненіе (36), получимъ:

$$A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}\{v'(y-u)dx - u'(y-v)dx + (u-v)dy\} = 0. \quad (39)$$

Въ такой формѣ рѣшается простѣйшая задача. Чтобы найти самое общее рѣшеніе задачи, нужно къ уравненію (39) прибавить уравненіе (24), въ которомъ нужно положить:

$$\begin{aligned} F &= (y-u)(y-v), \\ F_1 &= (\alpha+1)(y-v) + (\beta+1)(y-u), \\ F_2 &= (\alpha+1)u'(y-v) + (\beta+1)v'(y-u). \end{aligned} \quad (40)$$

Замѣчательно то обстоятельство, что найденное рѣшеніе годится во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ двухъ: 1) когда показатели α и β суть цѣлыя отрицательныя числа, 2) когда $\alpha + \beta$ равно цѣлому отрицательному числу. Первый случай рѣшенъ въ § 4. Покажемъ здѣсь рѣшеніе второго случая.

Требуется найти самую общую форму дифференціального уравненія перваго порядка, такъ чтобы ея интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^2(y-v)^{-m-\alpha}$, гдѣ m есть цѣлое положительное число.

Для рѣшенія этой задачи прежде всего разыщемъ такое дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^2(y-v)^{\alpha-1}$. Простѣйшая форма такого дифференціального уравненія будетъ:

$$A(v-u)^{-3}\{v'(y-u)dx - u'(y-v)dx + (u-v)dy\} = 0.$$

По доказанному въ § 8 нужно это уравненіе умножить на $(y-v)^{m+1}$ и прибавить къ уравненію (33), въ которомъ вмѣсто F , F_1 и F_2 нужно подставить ихъ выраженія (40), въ которыхъ вмѣсто β нужно подставить $-m-\alpha$. Въ результатѣ получимъ самую общую форму дифференціального уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^2(y-v)^{-m-\alpha}$.

Этимъ я заканчиваю изслѣдованіе задачи Коркина и думаю, что эта задача изслѣдована во всѣхъ подробностяхъ.

По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ:

**Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный
интегральный множитель факторіальной формы.**

А. Н. Коркина.

Подъ этимъ заглавіемъ появилась въ Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества ¹⁾ статья В. П. Ермакова, содержащая новое изложеніе рѣшенія той задачи, которая трактуется въ моемъ мемуарѣ подъ заглавіемъ: „Изысканія о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“ ²⁾.

Если бы упомянутую статью написалъ кто либо другой, я не считалъ бы нужнымъ отвѣчать на нее, но такъ какъ она принадлежитъ столь уважаемому ученому какъ В. П. Ермаковъ, то мнѣ кажется необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія.

Въ предисловіи къ своей статьѣ (§ 1) В. П. Ермаковъ подвергаетъ критикѣ мое изложеніе предмета въ упомянутомъ мемуарѣ, въ другихъ же параграфахъ излагаетъ свои собственныя изслѣдованія, касающіяся факторіальныхъ множителей.

На критику моего изложенія я отвѣчать не буду, такъ какъ лучшимъ отвѣтомъ на нее служить оглавленіе содержанія параграфовъ, приложенное къ моему мемуару.

Относительно же изслѣдованій В. П. Ермакова и его новаго изложенія рѣшенія моей задачи я сдѣлаю нѣсколько замѣчаній.

Сначала посмотримъ, какъ онъ выражаетъ самую задачу. Въ § 2 онъ ее формулируетъ такъ:

¹⁾ Вторая серія томъ IX н^о 1.

²⁾ Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ. Томъ XXIV.

„Пусть M и N означаютъ цѣлыя алгебраическія функціи переменнаго y , коэффициенты у этихъ многочленовъ суть функціи переменнаго x . Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \quad (1)$$

имѣло интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^2 (y - u_2)^2 \dots (y - u_n)^2.$$

Здѣсь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ суть числа постоянныя, u_1, u_2, \dots, u_n суть функціи переменнаго x .

Замѣчу, что здѣсь нужно добавить; между постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ нѣтъ ни одной равной нулю и величины u_1, u_2, \dots, u_n , неравныя между собою, могутъ быть въ частныхъ случаяхъ и постоянными.

Ничего не говорится о томъ, что задано и что считается неизвѣстнымъ.

Хотя въ заглавіи статьи и упоминается о *данномъ интегральномъ множителѣ*, но u_1, u_2, \dots, u_n не могутъ быть заданы по произволу какъ функціи отъ x , потому что въ этомъ случаѣ не будетъ существовать цѣлыхъ функцій M и N отъ y , для которыхъ уравненіе (1) имѣли бы множителемъ R .

Показатели же $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и число ихъ n должны быть заданы, потому что въ противномъ случаѣ не будетъ опредѣленныхъ выраженій для M и N въ уравненіи (1).

Наконецъ и при этихъ данныхъ задача, которую себѣ предлагаетъ авторъ становится невозможною, если не задать степеней полиномовъ M и N , такъ какъ *самаю общаю выраженія для M и N* , которое хочетъ найти В. П. Ермаковъ, не существуетъ, какъ видно изъ моего мемуара, а для каждаго степеней M и N получаются свои особенныя выраженія.

Такъ какъ онъ говоритъ, что излагаетъ рѣшеніе *моей* задачи, то я считаю нужнымъ привести здѣсь ея постановку, которая мною сдѣлана въ предисловіи къ упомянутому мемуару.

Разумѣя подъ M и N цѣлыя функціи отъ y , подъ u_1, u_2, \dots, u_l величины отъ y независяція, неравныя между собою, подъ P функцію отъ x , подъ h_1, h_2, \dots, h_l постоянныя, изъ которыхъ ни одна не равна нулю и выбирая подходящимъ образомъ изъ величинъ u_1, u_2, \dots, u_l и коэффициентовъ многочленовъ M и N тѣ, которые считаются заданными, я ставлю слѣдующую задачу:

Найти необходимые и достаточные условия, выраженные конечными уравнениями между данными и неизвестными количествами, для того чтобы уравнение

$$Mdx + Ndy = 0$$

могло имѣть множитель

$$\mu = P(y - u_1)^{h_1}(y - u_2)^{h_2} \dots (y - u_l)^{h_l}.$$

Здѣсь h_1, h_2, \dots, h_l и число ихъ l считаются заданными.

Прибавлю, что степени полиномовъ M и N также предполагаются заданными.

Умножимъ предыдущее дифференціальное уравнение на P и сдѣлаемъ

$$PM = M(y), \quad PN = N(y);$$

тогда уравнение

$$M(y)dx + N(y)dy = 0$$

будетъ имѣть множителемъ

$$\frac{\mu}{P} = \mu(y) = (y - u_1)^{h_1}(y - u_2)^{h_2} \dots (y - u_l)^{h_l}.$$

Пусть σ есть высшая изъ двухъ степеней полиномовъ $M(y), N(y)$; тогда они могутъ быть написаны такъ

$$M(y) = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + p_2 y^{\sigma-2} + \dots + p_{\sigma-1} y + p_\sigma,$$

$$N(y) = q_0 y^\sigma + q_1 y^{\sigma-1} + q_2 y^{\sigma-2} + \dots + q_{\sigma-1} y + q_\sigma,$$

гдѣ

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_\sigma, q_0, q_1, q_\sigma, \quad (2)$$

суть величины отъ y независящія и по крайней мѣрѣ одна изъ двухъ p_0, q_0 не равна нулю.

Прибавлю, что q_0 должна быть величиною постоянною.

Понятно, что отъ величинъ (2) и u_1, u_2, \dots, u_l можно требовать только одного, а именно, чтобы ихъ выраженія были необходимыми и достаточными для того, чтобы уравнение $M(y)dx + N(y)dy = 0$ имѣло множитель $\mu(y)$, причемъ кромѣ σ , обозначающаго степень одного изъ полиномовъ M и N , нужно задать и степень другого.

И показать, что величины (2) вмѣстѣ съ u_1, u_2, \dots, u_l удовлетворяютъ $\sigma + l$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Если бы мы задали нѣкоторыя изъ величинъ (2), напримѣръ изъ ряда

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_s$$

въ видѣ функцій отъ

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_s, u_1, u_2, \dots, u_l$$

и ихъ производныхъ, то, подставивъ ихъ въ уравненія (43) параграфа 16 моего мемуара, мы получили бы новыя дифференціальныя уравненія, которыя, если не окажутся слѣдствіями упомянутыхъ $\sigma + l$, нужно къ этимъ послѣднимъ присоединить и объ интегрированіи которыхъ сказать ничего нельзя. Они уже совсѣмъ не относятся къ моей задачѣ.

Посмотримъ же, какъ поступаетъ В. П. Ермаковъ, чтобы рѣшить задачу, и для этой цѣли рассмотримъ § 5 его статьи.

Онъ старается привести уравненіе

$$M(y)dx + N(y)dy = 0 \quad (3)$$

къ другому, имѣющему тотъ же множитель R , какъ и это (3).

Затѣмъ предполагая, что найдены общія величины коэффициентовъ при dx и dy въ этомъ другомъ, онъ хочетъ получить изъ нихъ общія же величины полиномовъ $M(y)$ и $N(y)$.

Онъ выводитъ сначала уравненіе (24), а именно,

$$\left(F \frac{\partial \Theta}{\partial x} - F_2 \Theta\right) dx + \left(F \frac{\partial \Theta}{\partial y} + F_1 \Theta\right) dy = 0, \quad (24)$$

имѣющее множителемъ произведеніе

$$(y - u_1)^{a_1} (y - u_2)^{a_2} \dots (y - u_n)^{a_n}$$

при произвольныхъ величинахъ u_1, u_2, \dots, u_n , независимыхъ отъ y .

Въ уравненіи (24) F, F_1, F_2 имѣютъ такія величины:

$$F = (y - u_1)(y - u_2) \dots (y - u_n), \quad F_1 = F \sum_i \frac{a_i + 1}{y - u_i}, \quad F_2 = F \sum_i \frac{(a_i + 1)u_i'}{y - u_i},$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n,$

а Θ есть произвольная цѣлая функція отъ y .

Потомъ, конечно предполагая, что u_1, u_2, \dots, u_n имѣютъ тѣже величины, что и въ множитель R уравненія (3), онъ вычитаетъ уравненіе (24) изъ (3) и получаемъ новое уравненіе, которое мы напомнимъ такъ:

$$M_1(x)dx + N_1(y)dy = 0 \quad (4)$$

гдѣ, слѣдовательно, будетъ

$$M_1(y) = M(y) - F \frac{\partial \Theta}{\partial x} - F_2 \Theta, \quad N_1(y) = N(y) - F \frac{\partial \Theta}{\partial y} - F_1 \Theta \quad (5)$$

Назовемъ черезъ τ степень полинома $M(y)$ и черезъ ρ степень $N(y)$ относительно переменнѣй y . Число σ есть наибольшее изъ двухъ τ и ρ .

Уравненіе (4) дѣйствительно будетъ имѣть множитель R .

В. П. Ермаковъ хочетъ сдѣлать степень полинома $N_1(y)$ ниже чѣмъ $n - 1$.

Для этой цѣли, предполагая, что $\rho > n - 2$, онъ дѣлаетъ $\rho = n + m - 1$, гдѣ m цѣлое и положительное число, или нуль. За Θ онъ беретъ цѣлую функцію степени m

$$\Theta = r_0 y^m + r_1 y^{m-1} + \dots$$

Чтобы сдѣлать степень $N_1(y)$ ниже чѣмъ ρ , онъ дѣлаетъ

$$q_0 = \frac{r_0}{\sum_i \alpha_i + m}, \quad (6)$$

гдѣ у него q_0 есть коэффициентъ при y^0 въ полиномѣ $N(y)$, который онъ пишетъ такъ

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \dots$$

Слѣдовательно это q_0 можетъ не совпадать съ моимъ q_0 , введеннымъ выше.

Относительно уравненія (4) нужно замѣтить слѣдующее:

Во первыхъ формула (6) В. П. Ермакова не вѣрна. Нужно сдѣлать

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum_i \alpha_i + m + n},$$

въ чемъ легко убѣдиться, когда уравниваемъ нулю коэффициентъ при y^0 въ полиномѣ $N_1(y)$.

Для дальнѣйшаго пониженія нужно пользоваться коэффициентами

$$r_1, r_2 \dots r_m,$$

чтобы довести степень $N_1(y)$ до $\rho - m - 1 = n - 2$.

Но В. П. Ермаковъ замѣчаетъ, что величина r_0 невозможна, когда знаменатель въ ней есть нуль, то есть, когда

$$\sum_i \alpha_i + m + n = 0$$

и этимъ ограничивается.

Между тѣмъ при нахожденіи каждой изъ величинъ $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ окажется исключительный случай.

Такъ напримѣръ, уравнивая нулю коэффициентъ при y^{n-1} въ $N_1(y)$, мы получимъ для нахожденія r_1 уравненіе

$$q_1 - [\sum_i (\alpha_i + 1) u_i - (\sum_i \alpha_i + n + m) \sum_i u_i] r_0 - (\sum_i \alpha_i + m + n - 1) r_1 = 0$$

и исключительный случай будетъ, когда

$$\sum_i \alpha_i + m + n - 1 = 0;$$

значить тотъ, который упоминается В. П. Ермаковымъ, не единственный.

Во всѣхъ остальныхъ, неисключительныхъ случаяхъ, степень $N_1(y)$ можетъ быть доведена до $n - 2$. Тогда окажется, что $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ и коэффициенты этого приведеннаго полинома $N_1(y)$ будутъ функциями отъ

$$u_1, u_2, \dots u_n, q_0, q_1, q_2, \dots q_m, \quad (7)$$

гдѣ величины $q_0, q_1, q_2, \dots q_m$ суть тѣ, которыя находятся въ формулѣ

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \dots$$

Что касается коэффициентовъ $M_1(y)$, то послѣ приведенія они будутъ функциями не только отъ величинъ (7), но еще и отъ ихъ производныхъ и кромѣ того отъ

$$p_0, p_1, p_2, \dots p_\sigma,$$

находящихся въ формулѣ

$$M(y) = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + \dots + p_{\sigma-1} y + p_\sigma,$$

гдѣ у насъ σ есть наибольшее изъ чиселъ τ и ρ .

Назовемъ по аналогіи σ' наибольшую изъ степеней двухъ полиномовъ $M_1(y)$ и $N_1(y)$ послѣ сдѣланнаго ихъ приведенія. Тогда можно ихъ написать такъ

$$M_1(y) = P_0 y^{\sigma'} + P_1 y^{\sigma'-1} + P_2 y^{\sigma'-2} + \dots + P_{\sigma'-1} y + P_\sigma.$$

$$N_1(y) = Q_0 y^{\sigma'} + Q_1 y^{\sigma'-1} + Q_2 y^{\sigma'-2} + \dots + Q_{\sigma'-1} y + Q_\sigma,$$

гдѣ изъ двухъ величинъ P_σ, Q_σ крайней мѣрѣ одна не равна нулю.

Во вторыхъ степень $N_1(y)$ дѣйствительно будетъ $n - 2$ послѣ приведенія, но откуда взять В. П. Ермаковъ, что степень $M_1(y)$ будетъ $n - 1$?

Онъ указываетъ на уравненіе (4) его статьи, но изъ него ничуть не слѣдуетъ, что она есть $n - 1$.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что число τ , или степень $M(y)$ есть произвольное. Возьмемъ, на примѣръ, $\tau > m + n$; тогда степень $M_1(y)$ какъ до приведенія, такъ и послѣ него, будетъ $\tau > n - 1$.

Если взять $\tau \leq m + n$, то почему думаетъ В. П. Ермаковъ, что всѣ коэффициенты въ $M_1(y)$ при

$$y^{m+n}, y^{m+n-1}, \dots, y^n$$

должны непремѣнно уничтожиться?

Такимъ образомъ утвержденіе его о степени $M_1(y)$ прямо не вѣрно.

Въ третьихъ, нигдѣ не упоминается о важномъ случаѣ, когда $\tau > \rho + 1$ ¹⁾. Тогда задача можетъ не имѣть рѣшенія. Дѣйствительно, тогда величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не совершенно произвольны, а должны удовлетворить уравненію

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\tau. \quad (8)$$

Если это условіе выполнено, то степень $M_1(y)$ послѣ приведенія останется тоже τ , если возьмемъ $\tau > m + n$, или иначе, $\tau > \rho + 1$, что и до приведенія.

Если оно несоблюдено, то будетъ $\tau \leq \rho + 1$, или иначе, $\tau \leq m + n$. Возьмемъ въ общемъ случаѣ $\tau = \rho + 1 = m + n$ и въ функціи Θ сдѣлаемъ

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum_i \alpha_i + m + n}, \quad (9)$$

оставляя r_1, r_2, \dots, r_m произвольными.

Тогда степень $N_1(y)$ будетъ $\rho - 1 = m + n - 2$, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться $\rho + 1$, ибо тогда она превышала бы степень $N_1(y)$ на двѣ единицы, а это требуетъ по § 5 моей статьи, чтобы условіе (8) было соблюдено. Такъ какъ послѣдняго нѣтъ, а уравненіе

$$M_1(y) dx + N_1(y) dy = 0$$

все таки имѣетъ множитель R , то въ $M_1(y)$, при выбранной величинѣ (9) количества r_0 , коэффициентъ при $y^{\rho+1}$ долженъ уничтожиться. Это даетъ

$$p_0 + r'_0 = 0, \text{ или } p_0 = -\frac{q'_0}{\sum_i \alpha_i + m + n}.$$

¹⁾ См. § 5 моей цитированной статьи.

Если, удержавъ величину (9) для r_0 , мы сдѣлаемъ

$$r_i = \frac{q_1 - [\sum_i (\alpha_i + 1) u_i - (\sum_i \alpha_i + m + n) \sum_i u_i]}{\sum_i \alpha_i + m + n - 1},$$

предполагая, что $\sum_i \alpha_i + m + n - 1$ не нуль, то коэффициентъ при y^{q-1} въ $N_1(y)$ уничтожится, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться равною q , ибо условіе

$$\sum_i \alpha_i + q = \sum_i \alpha_i + m + n - 1 = 0$$

не выполнено.

Значитъ въ $M_1(y)$ коэффициентъ при y^q долженъ быть нулемъ, а это даетъ

$$p_1 - r_1' + r_0' \sum_i u_i + r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i' = 0,$$

откуда выводимъ

$$p_1 = r_1' - r_0' \sum_i u_i - r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i'.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ далѣе, мы увидимъ, что, если не встрѣтится ни одного изъ исключительныхъ случаевъ, упомянутыхъ въ замѣчаніи первомъ, мы можемъ довести степень $M_1(y)$ до $n-1$, а степень $N_1(y)$ до $n-2$.

Въ приведенномъ уравненіи (4) будетъ тогда $\sigma' = n-1$.

Въ третьихъ утверждение В. П. Ермакова, что по исключеніи

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_0',$$

изъ $\sigma' + n = 2n-1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффициенты приведеннаго уравненія (4), останется $n-1$ самостоятельныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегралы которыхъ будутъ содержать $n-1$ независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ, опять неврѣно.

Дѣйствительно, у него ничего не говорится о важномъ случаѣ, когда мое число a , или въ настоящемъ случаѣ $\sum_i \alpha_i + \sigma' = \sum_i \alpha_i + n-1$ равно одному изъ чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-3.$$

то есть, когда $\sum_i \alpha_i$ имѣетъ одну изъ величинъ

$$-2, -3, -4, \dots, -(n-1).$$

Эти величины не даютъ ни одного изъ упомянутыхъ исключительныхъ случаевъ и, слѣдовательно, при нихъ приведеніе уравненія (4) возможно.

Между тѣмъ число дифференціальныхъ уравненій и постоянныхъ произвольныхъ въ ихъ интегралахъ можетъ быть и n (см. §§ 17 и 19 моей статьи).

Въ четвертыхъ, кромѣ упомянутыхъ важныхъ случаевъ, о которыхъ ничего не говорится, не упоминается также о слѣдующихъ:

Когда степень полинома $M(y)$ меньше степени $N(y)$. Въ этомъ случаѣ нѣсколько интеграловъ дифференціальныхъ уравненій задачи получается непосредственно. (См. §§ 9, 10 и 12 моей статьи).

Когда $\sum_i \alpha_i$ есть цѣлое число. Тогда существуетъ одинъ интегралъ, получающійся непосредственно. (См. § 15 моей статьи).

Не устанавливается съ точностью ни число дифференціальныхъ уравненій задачи, ни число ихъ независимыхъ интеграловъ въ различныхъ случаяхъ.

Наконецъ, въ пятыхъ, замѣчу, что приведеніе заданнаго уравненія къ другимъ по §§ 3 и 5 статьи автора настолько усложняетъ задачу о разысканіи конечныхъ уравненій между величинами

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_5, u_1, u_2, \dots, u_r,$$

что самъ авторъ ихъ написать не можетъ.

Пока же этого не сдѣлано, можно сказать, что рѣшеніе задачи отсутствуетъ.

Не дѣлая другихъ возраженій, я въ заключеніе скажу, что хотя я и нахожу замѣчанія В. П. Ермакова, относящіяся къ моей задачѣ, весьма интересными и важными, но не могу съ нимъ согласиться, что мои результаты изложены имъ въ простой и ясной формѣ, какъ это онъ говоритъ въ концѣ своего предисловія, ни въ томъ, что задача изслѣдована имъ во всѣхъ подробностяхъ, какъ онъ полагаетъ въ концѣ своей статьи.

Исслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

Г Л А В А I.

Образованіе производныхъ уравненій С. Ли и задача ихъ интегрированія.

1. Настоящее исслѣдованіе мы начнемъ съ изложенія начальныхъ понятій, которыя представляютъ основы классической теоріи частныхъ дифференціальныя уравненій.

Какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія съ частными производными получаются при помощи исключенія произвольныхъ постоянныхъ величинъ или произвольныхъ функцій изъ функціональных уравненій и ихъ производныхъ уравненій.

Пусть зависимая перемѣнная z обозначаетъ функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y , которая опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ

$$z = f(x, y).$$

Назовемъ черезъ p и q частныя производныя перваго порядка функціи z , соотвѣтственно по независимымъ перемѣннымъ x и y , т. е. положимъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующая дифференціальная зависимость, равнозначная обоимъ предыдущимъ равенствамъ

$$dz = p dx + q dy.$$

Пусть имѣемъ зависимость между разсматриваемыми переменными z, x, y , которая опредѣляетъ семейство поверхностей, зависящее отъ двухъ различныхъ параметровъ a и b , и представляется уравненіемъ

$$z = f(x, y, a, b). \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднее равенство и его два производныя уравненія перваго порядка

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

образуютъ совместно систему трехъ уравненій, которыя, по исключеніи параметровъ a и b , даютъ въ результатѣ одну зависимость слѣдующаго вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (3)$$

Послѣднее полученное равенство (3) представляетъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p и q одной неизвѣстной функции z и характеризуетъ собою общія свойства всѣхъ поверхностей даннаго вида (1).

Рѣшеніе обратнаго вопроса, относительно разысканія функціональных уравненій поверхностей, удовлетворяющихъ условіямъ, выраженнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (3), представляетъ такъ называемую задачу интегрированія послѣдняго дифференціального уравненія.

Всякое значеніе функции z , въ переменныхъ x и y , опредѣляющее какую-либо поверхность искомаго вида, и, стало-быть, совместно со значеніями своихъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ утождествляющее данное дифференціальное уравненіе (3), называется его *рѣшеніемъ*, или *интеграломъ*.

Полнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), заключающее двѣ различныя произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ даннаго рѣшенія и его двухъ производныхъ уравненій перваго порядка, приводитъ къ одному только исходному дифференціальному уравненію (3).

Частнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), получаемое изъ полнаго его интеграла сообщеніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ величинамъ, входящимъ въ этотъ полный интегралъ.

Наконецъ, *общимъ* и *особеннымъ* интегралами называются рѣшенія уравненія (3), опредѣляемыя геометрически какъ обертки семейства поверхностей (1), образованныя соотвѣтственно въ предположеніяхъ, что параметры a и b связаны, въ первомъ случаѣ одной произвольной зависимостью, а во второмъ случаѣ a и b независимы между собой.

Если остановиться на рассматриваемомъ случаѣ двухъ независимыхъ переменныхъ, то, относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, координаты x , y , z отмѣчаютъ въ пространствѣ точку поверхности, представленной уравненіемъ (1), а частныя производныя p и q опредѣляютъ положеніе касательной плоскости въ рассматриваемой точкѣ поверхности. Всѣ приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ всякаго труда на случай произвольнаго числа независимыхъ переменныхъ величинъ и на системы совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ переменнымъ.

Послѣднія геометрическія представленія тѣсно связаны съ классической теоріей уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, созданной трудами Лагранжа, Коши и Якоби. На изложенномъ выше способѣ происхожденія рассматриваемыхъ дифференціальнахъ уравненій и на указанныхъ геометрическихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ основаны всѣ приложенія названной теоріи къ цѣлому ряду вопросовъ геометріи и анализа.

Со времени созданія исчисленія безконечно-малыхъ величинъ до семидесятихъ годовъ прошлаго столѣтія, теорія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи развивалась, исходя изъ разсмотрѣнія изложенныхъ выше основныхъ понятій дифференціального исчисленія, относительно частныхъ производныхъ зависимыхъ переменныхъ по независимымъ переменнымъ. Затѣмъ С. Ли поставилъ дальнѣйшее развитіе изучаемой теоріи въ зависимость отъ изслѣдованія новыхъ переменныхъ величинъ и новыхъ способовъ образованія особаго рода *производныхъ* уравненій, которыя замѣнили собой дифференціальныя уравненія съ частными производными, въ классическомъ смыслѣ этого слова.

Въ нашемъ сочиненіи мы имѣемъ въ виду критическое изслѣдованіе новыхъ ученій С. Ли, которое приведетъ насъ къ строгому различію между обоими типами указанныхъ уравненій,—съ частными производными классической теоріи и производныхъ уравненій С. Ли.

Поэтому мы начнемъ послѣдующее изложеніе съ разсмотрѣнія основныхъ понятій рассматриваемой теоріи.

2. Въ своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи частныхъ дифференціальнахъ уравненій С. Ли ввелъ новыя отличныя отъ предыдущихъ понятія, разсмотрѣнію которыхъ и посвящаются послѣдующія строки ¹⁾.

¹⁾ S. Lie.—Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben (Nachrichten vor der K. Gesellschaft der Wissenschaften u. D. G. A. Universität. Göttingen, 1873. S. 173).

S. Lie.—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen. Bd. IX, 1876. S. 250).

Пусть, согласно съ предыдущимъ, величины x, y, z обозначаютъ координаты нѣкоторой данной точки въ пространствѣ, а X, Y, Z представляютъ текущія координаты. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (x, y, z) , выражается слѣдующимъ равенствомъ

$$Z - z = p (X - x) + q (Y - y),$$

гдѣ значенія коэффициентовъ p и q вполне опредѣляютъ положеніе опредѣленной плоскости, которую условимся символически обозначать черезъ (p, q) .

Такимъ образомъ координаты x, y, z и параметры p, q , отмѣчая опредѣленную точку въ пространствѣ и проходящую черезъ нее плоскость, вмѣстѣ съ тѣмъ вполне опредѣляютъ нѣкоторый бесконечно-малый криволинейный поверхностный элементъ, построенный въ разсматриваемой точкѣ (x, y, z) и совпадающій въ этой точкѣ съ построенной въ ней плоскостью (p, q) .

Поэтому совокупность разсматриваемыхъ пяти величинъ

$$x, y, z, p, q \quad (4)$$

С. Ли называетъ *поверхностнымъ элементомъ* (Flächenelement), или иногда, для краткости изложенія, *элементомъ* (Element).

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями, С. Ли называетъ *системой поверхностныхъ элементовъ* (Schar v. Flächenelementen). Такъ, напримѣръ, всякое уравненіе между переменными величинами (4)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (5)$$

опредѣляетъ систему поверхностныхъ элементовъ, совершенно независимо отъ того, заключаетъ ли это уравненіе всѣ пять разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ, или только нѣкоторыя изъ нихъ.

S. Lie u. F. Engel.—Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen (Mathematische Annalen, Bd. 59, S. 193).

S. Lie u. F. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, II Abschnitt. Leipzig, 1890. S. 77.

S. Lie u. G. Scheffers.—Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig. 1896. S. 181.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891. p. 241.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffsche Problem. Leipzig 1900. S. 230.

F. Klein.—Conferences sur les Mathématiques faites au congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago. Paris. 1898. p. 18.

F. Klein.—Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1891, p. 187).

Н. Цытовичъ.—Теорія Гамильтона—Якоби—Ли въ Механикѣ. С.-Петербургъ. 1899, стр. 54, 70.

Два смежных бесконечно близко расположенных поверхностных элемента называются *соединенными* (*vereinigt*), если точка одного элемента расположена въ плоскости другого.

Легко вывести аналитическое условіе, показывающее, что данный поверхностный элементъ (4) находится въ *соединеніи* съ бесконечно близкимъ съ нимъ элементомъ

$$x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq.$$

Подставляя для этого координаты точки послѣдняго элемента вмѣсто текущихъ координатъ въ уравненіе плоскости (p, q), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = p dx + q dy, \quad (6)$$

которое и представляетъ искомое условіе *соединенности* обоихъ разсматриваемыхъ поверхностныхъ элементовъ.

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ *соединеніи* со всѣми смежными съ ними бесконечно-близко расположенными элементами, называется, согласно съ С. Ли, *собраніемъ* поверхностныхъ элементовъ (*Element-Verein*, или *Element-Mannigfaltigkeit*).

Такимъ образомъ, при разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ, приходится разсматривать прежде всего условія, опредѣляющія данную систему элементовъ и затѣмъ—условія ихъ соединенности.

Легко видѣть, напримѣръ, что совокупность всѣхъ точекъ какой-либо поверхности и построенныхъ въ нихъ касательныхъ плоскостей къ этой поверхности представляетъ собраніе элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ данную поверхность.

Второй примѣръ представляетъ система элементовъ, изъ всѣхъ точекъ какой-либо кривой линіи въ пространствѣ и плоскостей, проходящихъ черезъ касательныя прямыя, проведенныя въ точкахъ разсматриваемой кривой, которыя образуютъ собраніе элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ вдоль нашей кривой линіи.

Наконецъ, третьяго вида собраніе образуется системой элементовъ, плоскости которыхъ проходятъ черезъ одну общую точку пространства.

Легко вообразить еще и другія собранія поверхностныхъ элементовъ, которыя получаются изъ послѣднихъ двухъ указанныхъ типовъ собраній, введеніемъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, относительно составляющихъ ихъ элементовъ, расположенныхъ вдоль кривой линіи или пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Всѣ поверхностные элементы, которые составляютъ геометрическія собранія, построены въ бесконечно-близко расположенныхъ между собой

точкахъ пространства, образующихъ поверхности, кривыя линіи или сливающихся въ одной точкѣ. Эти геометрическія формы, заполненныя сплошнымъ образомъ точками поверхностныхъ элементовъ геометрическихъ собраній, мы будемъ называть *геометрическимъ мѣстомъ* разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ. Такъ, по отношенію къ указаннымъ тремъ типамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ поверхности, кривыя линіи или пересѣкающихся въ общей точкѣ, эти послѣднія: поверхность, кривая линія и точка, представляютъ геометрическія мѣста разсматриваемыхъ собраній.

3. Исходя изъ равенства (6), выражающаго условіе соединенности поверхностныхъ элементовъ, легко составить понятіе о всѣхъ возможныхъ собраніяхъ, которыя могутъ быть составлены изъ поверхностныхъ элементовъ и убѣдиться, что они исчерпываются перечисленными выше собраніями.

Условимся для этого прежде всего говорить, что дифференціальное равенство (6) *удовлетворяется*, на основаніи данныхъ функциональных уравненій между переменными x , y , z , p и q , если оно является алгебраическимъ слѣдствіемъ этихъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій, т. е. когда дифференціальное соотношеніе (6) уничтожается тождественно, въ силу всѣхъ послѣднихъ зависимостей между переменными величинами (4). Условимся далѣе называть удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ функциональныя зависимости *рѣшеніемъ* уравненія (6). Изъ самаго понятія о рѣшеніи уравненія (6) непосредственно слѣдуетъ, что представляющія его функциональныя зависимости должны заключать явнымъ образомъ переменную величину z , такъ какъ въ противномъ случаѣ невозможно получить изъ нихъ дифференціальныхъ соотношеній, заключающихъ дифференціалъ dz , слѣдствіемъ которыхъ являлось бы равенство (6). Поэтому необходимо предположить, на основаніи послѣдняго равенства, что существуетъ по меньшей мѣрѣ одна зависимость между переменными величинами x , y , z , p и q , разрѣшимая относительно переменной z .

Докажемъ кромѣ того, что, каково бы ни было число уравненій, представляющихъ рѣшеніе равенства (6), между ними всегда существуетъ одна зависимость, заключающая только три переменныхъ x , y и z . Последнее предложеніе становится очевиднымъ, если число разсматриваемыхъ уравненій больше двухъ, ибо въ такомъ случаѣ изъ нихъ всегда возможно исключить двѣ переменныя величины p и q и получить въ результатѣ, по меньшей мѣрѣ, одну искомую зависимость только между переменными x , y и z .

Поэтому достаточно рассмотреть предположенія, что рѣшенія уравненія (6) представляются одной или двумя зависимостями между разсматриваемыми переменными (4).

Начнем съ изслѣдованія перваго случая и предположимъ, что рѣшеніе равенства (6) представляется однимъ уравненіемъ, которое, на основаніи изложенныхъ соображеній, приводится къ слѣдующему виду

$$z = \varphi (x, y, p, q).$$

Стало-быть, равенство (6) должно быть тождественно слѣдующему дифференціальному уравненію

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq.$$

Изъ сравненія обоихъ равенствъ слѣдуютъ прежде всего тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0,$$

которыя показываютъ, что функція φ зависитъ только отъ x, y и не заключаетъ переменныхъ p и q , т. е. представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi (x, y).$$

Кромѣ того мы заключаемъ еще о существованіи двухъ равенствъ

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ предположенія, что рѣшеніе уравненія (6) представляется однимъ только равенствомъ, мы приходимъ къ необходимости заключить о существованіи еще двухъ, при чемъ совокупность всѣхъ трехъ послѣднихъ равенствъ опредѣляетъ собой собраніе поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ собой поверхность, опредѣляемую первымъ изъ трехъ написанныхъ выше уравненій.

Аналогичное заключеніе получается также и во второмъ случаѣ, соотвѣтствующемъ предположенію, что рѣшеніе равенства (6) дается двумя уравненіями. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая, соотвѣтствующіе предположеніямъ, что уравненія изслѣдуемаго рѣшенія разрѣшимы относительно двухъ переменныхъ z и p или относительно z и y , или, что то-же самое, относительно совокупностей переменныхъ z и q , или z и x .

Пусть, напримѣръ, система равенствъ

$$z = \varphi (x, y, q), \quad p = \psi (x, y, q)$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (6). Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе должно быть слѣдствіемъ данныхъ уравненій и ихъ производныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq,$$

$$dp = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq.$$

Поэтому, называя через λ и μ два неопределенные коэффициента мы должны имѣть тождество

$$\begin{aligned} dz - p dx - q dy = \\ \lambda \left(dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq \right) + \\ + \mu \left(dp - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial q} dq \right), \end{aligned}$$

которое приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \quad \mu dp = 0, \\ p &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Если предположить изъ второго равенства, что $dp = 0$, т. е. положить

$$p = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная величина, то къ первоначальнымъ уравненіямъ слѣдуетъ присоединить новое равенство

$$C = \psi(x, y, q),$$

такъ что въ результатѣ изслѣдуемое рѣшеніе уравненія (6) представляется тремя равенствами.

Если же предположить, что

$$\mu = 0,$$

то полученныя выше равенства становятся

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= 0, \end{aligned}$$

т. е., во-первыхъ, функція φ не зависитъ отъ переменнй q и, во-вторыхъ, также въ разсматриваемомъ случаѣ рѣшеніе уравненія (6) заключается три уравненія и, съ геометрической точки зрѣнія, представляетъ то же самое собраніе элементовъ, что и въ первомъ изслѣдованномъ случаѣ.

Наконецъ, если разсматриваемое рѣшеніе выражается двумя равенствами вида

$$z = \varphi(x, p, q), \quad y = \psi(x, p, q),$$

то уравненіе (6) должно представлять слѣдствіе дифференціальныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq.$$

Для этого должны имѣть мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p + \frac{\partial \psi}{\partial x} q,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = q \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = q \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

Послѣднія два равенства приводятъ къ новому тождеству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} & \frac{\partial \psi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0,$$

которое показываетъ, что обѣ переменныя p и q исключаются изъ обоихъ уравненій, представляющихъ разсматриваемое рѣшеніе, такъ что также и въ этомъ случаѣ должна существовать одна зависимость между переменными x, y, z , которая, согласно съ предыдущимъ, разрѣшима относительно z .

Такимъ образомъ изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что рѣшеніе уравненія (6) должно заключать по меньшей мѣрѣ три равенства.

Но, кромѣ двухъ разсмотрѣнныхъ при этомъ возможныхъ предположеній, слѣдуетъ принять во вниманіе еще третье очевидное рѣшеніе уравненія (6)

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = 0.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что переменныя x, y, z должны имѣть постоянныя значенія, т. е. всѣ три уравненія рѣшенія равенства (6) заключаютъ только три переменныя x, y и z . Соответствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ очевидно пучекъ плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

Разсмотрѣнными тремя типами исчерпываются очевидно всѣ тѣ собранія элементовъ, которыя опредѣляются совокупностью трехъ уравненій между переменными x, y, z, p, q и соответствуютъ различнымъ возможнымъ предположеніямъ относительно разрѣшимости этихъ уравненій относительно переменныхъ x, y, z .

Кромѣ того ясно, что возможно предположить существованіе еще другихъ собраній элементовъ, которыя соответствуютъ рѣшеніямъ уравненія (6), представленнымъ болѣе чѣмъ тремя различными равенствами.

Если рѣшеніе равенства (6) заключаетъ пять различныхъ уравненій, то, на основаніи послѣднихъ, всѣ переменныя x, y, z, p, q получаютъ вполне опредѣленные постоянныя значенія. Оставляя послѣдній случай безъ разсмотрѣнія, какъ не представляющій интереса, займемся изслѣдованіемъ рѣшеній равенства (6), образованныхъ системой четырехъ различныхъ уравненій. Результатъ исключенія изъ нихъ переменныхъ величинъ p и q даетъ, по меньшей мѣрѣ, двѣ зависимости между остальными переменными x, y, z ; однако въ различныхъ частныхъ случаяхъ, число послѣднихъ зависимостей можетъ равняться и тремъ. Поэтому опредѣляемые разсматриваемыми уравненіями собранія представляютъ соответственно системы поверхностныхъ элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ по нѣкоторой кривой линіи или пересѣкающихся въ одной ихъ общей точкѣ. На послѣдующихъ строкахъ мы перейдемъ къ подробному разсмотрѣнію аналитическихъ выраженій всѣхъ указанныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ.

4. Какъ слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, собранія поверхностныхъ элементовъ опредѣляются аналитически системой уравненій слѣдующаго вида

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, v, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

гдѣ v принимаетъ одно изъ трехъ значеній 3, 4 или 5; при чемъ въ расчетъ принимается равенство (6). Разсматривая подобныя уравненія, мы всегда будемъ разумѣть опредѣленную область измѣненія переменныхъ, внутри которой однѣ изъ разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ опредѣляются однозначно черезъ остальные величины, входящія въ наши уравненія.

Если какая-либо переменная величина получаетъ всѣ возможные значенія, между предѣлами ея измѣненія, то С. Ли говоритъ, что разсматриваемая переменная имѣетъ ∞ , или ∞^1 различныхъ значеній. Если число разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ равняется n и онѣ связаны между собой m зависимостями, такъ что всѣ n переменныя величины

являются, внутри нѣкоторой области ихъ измѣненія, функціями только $n - m$ различныхъ переменныхъ величинъ, то наша система переменныхъ величинъ, по обозначенію С. Ли, представляетъ ∞^{n-m} различныхъ значеній.

Въ силу послѣднихъ обозначеній, мы говоримъ, что уравненіе (5) опредѣляетъ систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ.

Аналогичнымъ образомъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, выражаемое уравненіями (7), представляетъ ∞^{5-v} поверхностныхъ элементовъ, т. е. ∞^2 , или ∞^1 , или ∞^0 поверхностныхъ элементовъ въ зависимости отъ числа 3, 4 или 5 уравненій (7), при чемъ послѣднему символическому обозначенію ∞^0 соответствуетъ всего одинъ только опредѣленный поверхностный элементъ.

Начнемъ съ болѣе подробнаго рассмотрѣнія собраній ∞^3 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемыхъ системой слѣдующихъ трехъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и равенствомъ (6)-ымъ.

Согласно съ предыдущимъ, возможны три случая, соответствующіе предположеніямъ, что послѣдняя система уравненій даетъ одну, двѣ или три зависимости между переменными x, y и z , т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія являются соответственно, или поверхность, или кривая линія, или точка.

Если предположимъ, что уравненія (8), по исключеніи изъ нихъ переменныхъ p и q , даютъ одну только зависимость между переменными x, y, z , которая выражается равенствомъ

$$z = f(x, y),$$

т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія служить поверхность, представленная послѣднимъ уравненіемъ, то становится ясно, что наше собраніе поверхностныхъ элементовъ опредѣляется аналитически совокупностью написаннаго уравненія и его двухъ производныхъ уравненій

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ, уравненія (8) равнозначны послѣднимъ тремъ уравненіямъ, на основаніи которыхъ утождествляется очевидно уравненіе (6)-ое.

Если уравненіе (8), по исключеніи изъ нихъ p и q , представляютъ двѣ зависимости между переменными x, y, z , т. е. геометрическимъ

мѣстомъ изслѣдуемаго собранія служить кривая линія, которая опредѣляется двумя уравненіями

$$z = \varphi(x), y = \psi(x),$$

то третье равенство, къ которому должны приводить уравненія (8) разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ, получается изъ уравненія (6)-го подстановкой въ него значеній

$$dz = \varphi'(x) dx, dy = \psi'(x) dx.$$

Такъ какъ значеніе dx отличено отъ нуля, то искомое третье уравненіе разсматриваемаго собранія становится

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x) \cdot q.$$

Наконецъ, если всѣ три уравненія (8) не зависятъ отъ переменныхъ p и q , то соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ пучекъ поверхностей, пересѣкающихся въ данной точкѣ (x_0, y_0, z_0) , и уравненія его геометрическаго мѣста, а вмѣстѣ съ тѣмъ и всего собранія, приводятся къ слѣдующему виду

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0.$$

Пусть имѣемъ собраніе ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемое системой (7), въ предположеніи $v = 4$, т. е. выражаемое четырьмя различными уравненіями слѣдующаго вида

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

совмѣстно съ равенствомъ (6)-мъ.

Такъ какъ система четырехъ уравненій между пятью переменными величинами x, y, z, p и q дастъ, или двѣ, или три зависимости между первыми тремя изъ этихъ переменныхъ, то геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія можетъ быть кривая линія или точка. Кромѣ того легко убѣдиться, что въ обоихъ разсматриваемыхъ случаяхъ аналитическія выраженія разсматриваемыхъ собраній представляются совокупностью предыдущихъ трехъ уравненій, соотвѣтствующихъ собранію поверхностныхъ элементовъ (8), и одной новой зависимостью между переменными p и q .

Въ самомъ дѣлѣ, начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, когда геометрическое мѣсто собранія представляетъ кривую линію. Очевидно, что въ этомъ случаѣ, въ разсматриваемой нами области измѣненія пере-

мѣнныхъ, уравненія (9) изслѣдуемаго собранія элементовъ должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x), \quad y = \psi(x), \\ p &= \theta(x), \quad q = \chi(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Въ силу условія соединенности (6), должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\varphi'(x) = \theta(x) + \psi'(x)\chi(x), \quad (11)$$

которое очевидно должно удовлетворяться тождественно, такъ какъ въ противномъ случаѣ послѣднее равенство представляло бы новое уравненіе и изслѣдуемое собраніе элементовъ опредѣлялось бы пятью различными уравненіями, противно первоначальному предположенію. Если же равенство (11) является тождествомъ, то, при помощи его, оба послѣднія уравненія (10) могутъ быть замѣнены двумя новыми эквивалентными имъ уравненіями, которыя составляютъ слѣдующимъ образомъ. Замѣняя въ тождествѣ (11) функции $\theta(x)$ и $\chi(x)$ ихъ значеніями p и q , получаемъ равенство

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x)q,$$

которое мы и возьмемъ въ расчетъ взаимѣнъ одного изъ послѣднихъ двухъ уравненій (10). Совокупность полученнаго уравненія съ двумя первыми уравненіями (10) опредѣляетъ собой, какъ выше было указано собраніе ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ котораго служитъ кривая линія.

Что касается четвертаго дополнительнаго уравненія, то здѣсь слѣдуетъ отмѣтить два случая, когда, во-первыхъ, результатъ исключенія x, y, z изъ четырехъ уравненій (10) выражается однимъ равенствомъ, представляющимъ искомое уравненіе

$$p = \varphi(q), \quad (12)$$

и, во-вторыхъ, когда рассматриваемый результатъ исключенія представляется двумя уравненіями, т. е. обѣ величины p и q представляютъ постоянныя значенія:

$$p = a, \quad q = b. \quad (13)$$

Въ первомъ предположеніи уравненію (12)-му соответствуетъ коническій пучекъ направлений $p, q, -1$ въ точкѣ (x, y, z) , который, совместно съ первыми тремя уравненіями нашего собранія, опредѣляетъ единственный вполнѣ опредѣленный поверхностный элементъ въ каждой

точкѣ кривой, представляющей геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія. Поэтому послѣднее представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на полосѣ, или лентѣ, выходящей вдоль кривой линіи геометрическаго мѣста собранія.

Во второмъ предположеніи, въ силу равенствъ (13), тождество (11) принимаетъ видъ

$$\varphi'(x) = a + b\psi'(x)$$

и, благодаря интегрированію по x , даетъ слѣдующую зависимость между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\varphi(x) = ax + b\psi(x) + c,$$

гдѣ c — новая произвольная постоянная величина. Поэтому уравненія геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія приводятся къ виду

$$z = ax + by + c, \quad y = \psi(x),$$

и представляютъ плоскую кривую. Слѣдовательно, разсматриваемое собраніе въ настоящемъ случаѣ представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на плоской полосѣ, или лентѣ, расположенной вдоль геометрическаго мѣста собранія и въ его плоскости.

Такимъ образомъ различіе обоихъ собраній ∞^1 и ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служить кривая линія, состоитъ въ томъ, что первое собраніе представляется геометрической полосой, выходящей вдоль послѣдней кривой, тогда какъ второе собраніе представляется пучкомъ безконечнаго числа такихъ полосъ, выходящихъ вдоль кривой геометрическаго мѣста и произвольно переплетающихся между собой.

Наконецъ, если уравненія (9) даютъ, по исключеніи величинъ p и q , три зависимости между переменными x , y , z , то изслѣдуемое собраніе представляетъ пучекъ поверхностныхъ элементовъ, пересекающихся въ одной общей точкѣ (x_0, y_0, z_0) . Само собою разумѣется, что въ такомъ случаѣ равенства (9) приводятся къ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ p = \varphi(q). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Стало-быть и здѣсь разсматриваемое собраніе отличается также отъ соотвѣтствующаго собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ послѣдней зависимостью между переменными p и q . Какъ и выше легко видѣть, что, благодаря послѣдней зависимости, разсматриваемое собраніе выдѣляется изъ всѣхъ поверхностныхъ элементовъ, пересекающихся въ точкѣ

(x_0, y_0, z_0) , только тѣ элементы, которые касаются конуса, опредѣляемаго послѣднимъ уравненіемъ (14); въ предѣльномъ случаѣ разсматриваемое собраніе приводится къ системѣ элементовъ, которые пересѣкаются между собой вдоль одной и той же прямой линіи.

Предыдущія формулы указываютъ, что *уравненія каждою изъ собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, т. е. и самыя собранія, опредѣляются вполнѣ уравненіями своего геометрическаго мѣста.*

Что же касается уравненій собраній ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, то для ихъ опредѣленія необходимо прибавить къ уравненіямъ ихъ геометрическаго мѣста еще одно характеризующее данное собраніе равенство, устанавливающее зависимость между переменными p и q .

Всѣ приведенныя разсужденія и вычисленія показываютъ, къ какому частному виду должны преобразовываться написанныя нами въ общемъ видѣ уравненія (7) для того, чтобы опредѣлять собой собранія поверхностныхъ элементовъ того или другого рода. Весьма частный видъ, къ которому приводятся послѣднія уравненія, показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что функции F_i должны удовлетворять для этого особаго вида условіямъ.

Кромѣ приведенныхъ выше условныхъ обозначеній С. Ли ввелъ, для обозначенія собраній элементовъ, символы M_n^m съ двумя значками, указывающими соотвѣтственно: нижній—порядокъ собранія, т. е. порядокъ бесконечности поверхностныхъ элементовъ, а верхній—порядокъ геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія.

Поэтому условныя обозначенія

$$M_2^2, M_2^1, M_2^0$$

представляютъ собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ соотвѣтственно служатъ поверхность, кривая линія и точка.

Такимъ же образомъ символы

$$M_1^1, M_1^0$$

обозначаютъ собранія ∞^1 поверхностныхъ элементовъ съ геометрическими мѣстами, представляющими соотвѣтственно кривую линію и точку.

Наконецъ, условимся подъ обозначеніемъ

$$M_0^0$$

разумѣть собраніе, представленное одной толькой точкой и построенной въ ней одной опредѣленной плоскостью, которое аналитически выражается совокупностью пяти уравненій между разсматриваемыми пятью переменными величинами (4).

5. Изложенное выше учение, относительно геометрии поверхностных элементов и их собраний в пространствах трех измерений, легко распространяется на обобщенные понятия о пространствах многих измерений, число которых больше трех.

Условимся называть совокупность значений $2n + 1$ переменных величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n \quad (15)$$

поверхностнымъ элементомъ въ пространствахъ $n + 1$ измерений.

Совокупность значений поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условиями, или уравнениями называется *системой поверхностныхъ элементовъ*.

Два поверхностныхъ элемента, напримеръ, данный (15)-ый и безконечно близко расположенный съ нимъ элементъ

$$x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n, z + dz, p_1 + dp_1, \dots, p_n + dp_n$$

называются *соединенными*, если имѣетъ мѣсто слѣдующая зависимость

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n. \quad (16)$$

Наконецъ, система поверхностныхъ элементовъ, находящихся въ соединеніи со всѣми безконечно-близко расположенными съ ними элементами, т. е. удовлетворяющихъ равенству (16)-му, называется *собраниемъ поверхностныхъ элементовъ*.

Мы называемъ *рѣшеніемъ* равенства (16) конечныя функциональныя зависимости между переменными (15), которыя, совмѣстно со своими производными уравненіями, отождествляютъ равенство (16).

Составляя рѣшенія послѣдняго равенства, легко вывести уравненія, представляющія аналитическое выраженіе всѣхъ возможныхъ собраний поверхностныхъ элементовъ въ рассматриваемомъ пространствахъ $n + 1$ измерений,

Замѣтимъ прежде всего, что существованіе равенства (16) приводитъ къ существованію, по меньшей мѣрѣ, одной функциональной зависимости, выражающей значеніе переменной z въ видѣ функціи переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n слѣдующаго вида ¹⁾

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (17)$$

¹⁾ Cp. Lie — Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, S.S. 42, 78. M. Elie Cartan.—Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 1899).

Чтобы, на основаніи послѣдняго равенства, уравненіе (16) удовлетворялось тождественно, для этого должны имѣть мѣсто еще n слѣдующихъ уравненій

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

которыя совмѣстно съ предыдущимъ уравненіемъ представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Возможно сдѣлать еще другое предположеніе, что равенство (16) влечетъ существованіе между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , нѣсколькихъ зависимостей, число которыхъ обозначимъ черезъ $q + 1$. Послѣднія всегда разрѣшмы относительно переменной z и какихъ-либо q изъ остальныхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Не нарушая общности разсужденій, всегда можемъ представить рассматриваемыя равенства въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}), \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}), \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Если существуетъ рѣшеніе равенства (16), которое заключаетъ эти уравненія, то, подставляя послѣднія значенія $z, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$ въ равенство (16), заключаемъ о непремѣнномъ существованіи еще $n - k$ слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-q+i}} p_{n-q+i}, \\ &\quad k = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими $q + 1$ уравненіями (19), представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Такъ какъ формулы (17), (18) заключаются въ послѣднихъ формулахъ какъ частный случай, соотвѣтствующій предположенію $q = 0$, то уравненія (19)—(20) мы будемъ разсматривать какъ представляющія общій видъ рѣшеній равенства (16)-аго.

С. .Ин представляетъ уравненія (19)—(20) въ слѣдующемъ изящномъ видѣ. Вводя обозначеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^q g_i p_{n-q+i} - \varphi,$$

напишемъ равенства (19) — (20) слѣдующимъ образомъ

$$z = \sum_{i=1}^q \varphi_i p_{n-q+i} - H,$$

$$x_{n-q+i} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}, \quad p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, n-q.$$

Кромѣ указанныхъ рѣшеній равенства (16)-ого, представленныхъ совокупностью $n+1$ уравненій, легко составить новыя рѣшенія, съ большимъ числомъ уравненій, присоединяя къ предыдущимъ еще новыя уравненія, алгебраически совмѣстныя съ ними.

На предыдущихъ формулахъ основывается аналитическое представленіе геометрическихъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Начнемъ съ предположенія, что рассматриваемое собраніе выражается совокупностью $n+1$ различныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n+1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

которыя представляютъ рѣшеніе равенства (16). Каждое его рѣшеніе, на основаніи сказаннаго выше, заключаетъ по меньшей мѣрѣ одну зависимость между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть уравненія (21) рассматриваемаго собранія заключаютъ $q+1$ послѣднихъ зависимостей. Предположимъ далѣе, что, въ нѣкоторой области измѣненія переменныхъ, уравненія (21) приводятъ къ—(19)-ымъ; въ такомъ случаѣ очевидно, что остальные уравненія (21) должны приводиться къ виду (20)-ому, и для этого функціи F_i должны удовлетворять особымъ условіямъ.

Соотвѣтственно числу зависимостей между переменными x_1, x_2, \dots, x_n , которыя въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными считаются независимыми, мы будемъ подраздѣлять рассматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ на классы, относя послѣднее собраніе (21) къ q -ому классу, по числу q уравненій, представленныхъ формулами (19).

Такъ, напримѣръ, въ пространствѣ трехъ измѣреній мы рассматривали собранія поверхностныхъ элементовъ трехъ различныхъ классовъ: нулевого, перваго и втораго. Къ нулевому классу, въ пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ является поверхность; наконецъ, къ первому и

второму классамъ, въ томъ же пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служатъ соответственно кривая линія или точка.

Уравненія (19)-ыя мы условимся называть *геометрическимъ мѣстомъ* даннаго собранія поверхностныхъ элементовъ.

Отсюда легко видѣть; что *собраніе поверхностныхъ элементовъ, представленное въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній аналитически, при помощи такого же числа уравненій, вполне определяется своимъ геометрическимъ мѣстомъ, такъ что, при опредѣленіи такого собранія, совершенно достаточно задать его геометрическое мѣсто.*

Предположимъ далѣе, что мы имѣемъ дѣло съ собраніемъ поверхностныхъ элементовъ, представленнымъ системой $n + v + 1$ различныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, n + v + 1, (v \leq n), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

которые должны опредѣлять рѣшеніе уравненія (16)-аго. При этомъ, если $v = n$, т. е. число уравненій (22) равно $2n + 1$, то очевидно, что рассматриваемое собраніе приводится всего къ одному опредѣленному поверхностному элементу, занимающему опредѣленное положеніе и направление въ рассматриваемомъ пространствѣ $n + 1$ измѣреній.

Само собою разумѣется, что уравненія (22), по исключеніи всѣхъ n переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , дають, по меньшей мѣрѣ, $v + 1$ зависимостей между остальными переменными. Предположимъ, для общности разсужденій, что система (22) приводитъ къ $\mu + 1$ ($\mu > v$) зависимостямъ между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , которые представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-\mu}), \\ x_{n-\mu+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\mu}), \\ i &= 1, 2, \dots, \mu. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Какъ указано выше, при разсмотрѣніи рѣшеній уравненія (16)-аго, существованіе $\mu + 1$ послѣднихъ уравненій влечетъ за собой существованіе также слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-\mu+i}, \\ k &= 1, 2, \dots, n - \mu. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Поэтому система данныхъ уравненій (22) разсматриваемаго собранія должна состояться изъ $n + 1$ послѣднихъ уравненій (23)—(24), опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ μ -аго класса, и кромѣ того изъ дополнительныхъ v уравненій, опредѣляющихъ частный характеръ разсматриваемаго собранія и выделяющихъ его такимъ образомъ изъ общаго вида собраній μ -аго класса.

Распространяя прежнія обозначенія на разсматриваемое пространство $n + 1$ измѣреній, можемъ сказать, что совокупность уравненій (19)—(20) опредѣляетъ собраніе ∞^n поверхностныхъ элементовъ, которое выражается условнымъ символомъ

$$M_n^q,$$

гдѣ показатель n обозначаетъ порядокъ собранія, а q —классъ его геометрическаго мѣста. Такимъ же образомъ уравненія (22) опредѣляютъ собраніе ∞^{n-v} поверхностныхъ элементовъ, обозначаемое условнымъ символомъ

$$M_{n-v}^{\mu}.$$

Послѣднія условныя обозначенія вполне достаточны, чтобы, при помощи ихъ, возстановить общій видъ уравненій, представляющихъ аналитически разсматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ.

6. Приведенныя опредѣленія позволяютъ составить понятіе о производныхъ уравненіяхъ С. Ли, ученіе о которыхъ представляетъ развитіе классической теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Начнемъ съ разсмотрѣнія пространства трехъ измѣреній.

Пусть уравненія, представляющія аналитическое выраженіе какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, заключаютъ нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, число которыхъ меньше числа уравненій разсматриваемаго собранія. Исключивъ изъ послѣднихъ входящія въ нихъ постоянныя величины, получаемъ между переменными x, y, z, p, q новыя зависимости, которыя мы и будемъ въ послѣдующемъ изложеніи называть *производными уравненіями С. Ли*.

Если мы имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^2 , геометрическое мѣсто котораго представляется уравненіемъ семейства поверхностей, зависящимъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, то соответствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ ничто иное какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое получается исключеніемъ обоихъ параметровъ изъ даннаго уравненія поверхности и его двухъ частныхъ производныхъ уравненій перваго порядка. Эти послѣднія дифференціальныя уравненія мы изучали

выше, въ началѣ настоящей главы, и поэтому нѣтъ надобности больше на нихъ останавливаться.

Переходимъ къ разсмотрѣнію собранія поверхностныхъ элементовъ M_2^1 . Пусть уравненія его геометрическаго мѣста заключаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины a, b и представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x, a, b), \\ y &= \psi(x, a, b). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Присоединяемъ къ послѣднимъ двумъ уравненіямъ третье равенство, которое вмѣстѣ съ предыдущими опредѣляетъ разсматриваемое собраніе

$$\varphi'(x, a, b) = p + \psi'(x, a, b) q. \quad (26)$$

Предположимъ, что результатъ исключенія параметровъ a и b изъ послѣднихъ трехъ равенствъ выражается однимъ уравненіемъ, которое въ общемъ видѣ напишется слѣдующимъ образомъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

и представляетъ такимъ образомъ *производное уравненіе С. Ли*.

Остановимся подробнѣе на тѣхъ значеніяхъ, которыя имѣетъ функція F въ обоихъ случаяхъ, исчерпывающихъ всѣ возможныя предположенія, соотвѣтствующія условіямъ, когда уравненія геометрическаго мѣста (25) разрѣшаются относительно постоянныхъ a и b , или не разрѣшима относительно послѣднихъ. Въ первомъ предположеніи, внося изъ равенствъ (25) полученныя значенія a, b въ уравненіе (26), мы приходимъ къ производному уравненію С. Ли, которое въ настоящемъ случаѣ является линейнымъ уравненіемъ относительно переменныхъ p и q слѣдующаго вида

$$Pr + Qq = R,$$

гдѣ P, Q и R представляютъ функціи переменныхъ x, y и z . Во второмъ предположеніи параметры a и b исключаются изъ уравненій (25). Такъ какъ, въ силу первоначально поставленнаго условія, результатъ исключенія a и b изъ уравненій (25)—(26) долженъ представляться однимъ уравненіемъ, то, исключивъ a и b изъ системы (25)-ой, получимъ результатъ послѣдняго исключенія въ видѣ одной зависимости между переменными x, y, z слѣдующаго вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

къ которой вмѣстѣ съ тѣмъ приводится въ данномъ случаѣ разсматриваемое производное уравненіе С. Ли. Такимъ образомъ семейства изслѣ-

двухъ собраній M_2^1 , зависящихъ отъ двухъ параметровъ, приводятъ къ производнымъ уравненіямъ С. Ли, которыя, или линейны относительно переменныхъ p и q , или не зависятъ отъ нихъ.

Такъ, напримѣръ, пусть имѣемъ систему двухъ уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = bx.$$

Дополнительное уравненіе собранія поверхностныхъ элементовъ, соответствующее написанному геометрическому мѣсту, въ настоящемъ частномъ случаѣ становится

$$a = p + bq.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія a и b , опредѣляемыя первыми двумя уравненіями, получаемъ искомое производное уравненіе С. Ли въ слѣдующемъ видѣ

$$p + \frac{y}{x} q = \frac{xz - y}{x^2},$$

или

$$x (xp + yq) + y = xz.$$

Для второго примѣра, возьмемъ геометрическое мѣсто собранія M_2^1 , представленное системой уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = (ax + b)^2 + 2x.$$

Очевидно, что соответствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ зависимость только между переменными x , y , z въ слѣдующемъ видѣ

$$y = 2x + z^2.$$

Разсмотримъ, наконецъ, собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^0 , уравненія геометрическаго мѣста котораго зависятъ также отъ двухъ параметровъ a и b

$$z = \varphi(a, b),$$

$$y = \psi(a, b),$$

$$x = \Theta(a, b),$$

при чемъ результатъ исключенія параметровъ изъ послѣднихъ уравненій приводитъ къ одной зависимости между рассматриваемыми переменными. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ, производное уравненіе С. Ли представляетъ также зависимость только между переменными x , y и z .

Если бы уравнения геометрических мѣстъ изслѣдуемыхъ собраній, во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, заключали всего одинъ произвольный постоянный параметръ, то результатъ исключенія послѣдняго изъ уравненій собранія представлялъ бы систему двухъ производныхъ уравненій С. Ли.

Переходя къ собраніямъ ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, легко видѣть что представляющія его четыре уравненія могутъ зависѣть отъ трехъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ. Результатъ исключенія послѣднихъ приводитъ къ одному производному уравненію С. Ли. Если уравненія разсматриваемыхъ собраній заключаютъ два различныхъ или одинъ постоянный параметръ, то соответствующія производныя уравненія С. Ли представляютъ систему двухъ или трехъ совокупныхъ уравненій.

Наконецъ, если уравненія собранія M_0^0 заключаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины, то исключеніе ихъ приводитъ также къ одному производному уравненію С. Ли. Если число произвольныхъ постоянныхъ, въ уравненіяхъ разсматриваемаго собранія, меньше четырехъ, то результатъ ихъ исключенія изъ уравненій собранія приводитъ къ системѣ совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній. Пусть имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_n^q , которое опредѣляется вполне своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ, что уравненія его заключаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ и представляются слѣдующимъ образомъ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}),$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, которыя, совмѣстно съ послѣдними равенствами, выражаютъ аналитически разсматриваемое собраніе и имѣютъ, стало-быть, слѣдующій видъ

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \dots, n - q.$$

Написанныя равенства вмѣстѣ съ $q + 1$ предыдущими образуютъ систему $n + 1$ уравненій. Предположимъ, что результатъ исключенія изъ нихъ

всѣхъ параметровъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ представляется совокупностью m уравненій слѣдующаго вида

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Полученныя такимъ образомъ уравненія, черезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ параметровъ изъ функціональных уравненій, опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, представляютъ *производныя* уравненія С. .Іи.

Легко видѣть, что уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи классической теоріи представляютъ частный случай послѣднихъ производныхъ уравненій, соотвѣтствующій тому предположенію, что геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія, принадлежитъ къ *нулевому* классу, т. е. представляетъ уравненіе семейства поверхностей въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, зависящее отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Мы разсматривали до сихъ поръ собранія поверхностныхъ элементовъ типа M_n^q , опредѣляемыхъ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ теперь, что мы имѣемъ дѣло съ собраніями вида M_{n-v}^v , гдѣ $v \leq n$, при чемъ уравненія, опредѣляющія аналитически послѣднее собраніе, зависятъ отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, число которыхъ должно удовлетворять единственному условію, быть меньше числа данныхъ уравненій разсматриваемаго собранія. Результатъ исключенія послѣднихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, изъ уравненій разсматриваемаго собранія, представляетъ также *производныя уравненія* С. .Іи.

Пусть имѣемъ, напримѣръ, слѣдующее геометрическое мѣсто собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3 .

$$z = (C_1 x_1 + C_2) x_2 + C_3, \\ x_3 = C_1 x_1 x_2 + C_2.$$

Составляемъ слѣдующія два дополнительныя уравненія разсматриваемаго собранія

$$p_1 = C_1 x_2 - C_1 x_2 p_3, \\ p_2 = C_1 x_1 + C_2 - C_1 x_1 p_3.$$

Результатъ исключенія всѣхъ трехъ постоянныхъ величинъ C_1, C_2, C_3 изъ написанныхъ четырехъ уравненій приводитъ къ слѣдующему производному уравненію С. .Іи

$$(1 - p_3) (x_2 x_3 + x_1 p_1 - x_2 p_2) = x_1 x_2 p_1.$$

Для второго примѣра, возьмемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3, C_4 , опредѣляемое геометрическимъ мѣстомъ

$$z = (C_1 x_1 + C_2) x_2 + C_4,$$

$$x_3 = C_2 x_1 + C_3$$

и слѣдующимъ дополнительнымъ равенствомъ

$$C_1 C_2 (x_2 + x_1 p_3)^2 = C_4 x_3.$$

Составляя оба дополнительныя уравненія собранія

$$p_1 = C_1 x_2 - C_2 p_3,$$

$$p_2 = C_1 x_1 + C_2,$$

получаемъ въ результатъ совокупность пяти уравненій. Исключая изъ нихъ всѣ четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра, приходимъ къ искомому производному уравненію С. Ли

$$x_3 (z - x_2 p_2) + (x_1 p_1 - x_2 p_2) (p_1 + p_2 p_3) = 0.$$

7. Мы занимались до сихъ поръ изученіемъ понятій о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, рассматривали ихъ аналитическія выраженія и составляли производныя уравненія С. Ли, соответствующія семействамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, уравненія которыхъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Подобно тому какъ относительно дифференціальныхъ уравненій рѣшается задача объ ихъ интегрированіи, такъ совершенно аналогично въ теоріи С. Ли, изслѣдуемой на этихъ страницахъ, рѣшается слѣдующій вопросъ:

Даны производныя уравненія С. Ли: задача состоитъ въ составленіи соответствующихъ имъ функціональных уравненій собраній поверхностныхъ элементовъ.

Пользуясь терминологіей теоріи дифференціальныхъ уравненій, мы называемъ рѣшеніе послѣдняго вопроса *задачей интегрированія производныхъ уравненій С. Ли.*

Начнемъ съ разсмотрѣнія производнаго уравненія С. Ли.

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (27)$$

опредѣляющаго систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ трехъ измѣреній.

Если послѣднее уравненіе утождествляется, въ силу уравненій какого либо собранія элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* (Integralgebilde) даннаго производнаго уравненія С. Ли (27)-го.

Если послѣднее рѣшеніе заключаетъ произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ этихъ уравненій представляетъ одно данное уравненіе (27), то мы будемъ называть такое рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ* уравненія (27)-го.

Изъ предыдущихъ соображеній, относительно способа образованія производныхъ уравненій С. Ли, становится очевиднымъ, что полныя интегральныя собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ уравненія (27) должны зависѣть отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ; полныя интегральныя собранія ∞^1 элементовъ уравненій (27) заключаютъ три произвольныхъ постоянныхъ параметра; наконецъ, для того же уравненія (27) полное интегральное собраніе типа M_0^0 должно заключать четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра. Изъ послѣднихъ полныхъ интегральныхъ собраній всѣ собранія типа M_2 , т. е. составленныя изъ ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, мы условимся называть *полными интегральными собраніями С. Ли*, а ихъ геометрическія мѣста—*полными интегралами С. Ли* производнаго уравненія (27). Остальныя полныя интегральныя собранія типовъ M_1 и M_0 , т. е. составленныя соотвѣтственно изъ ∞^1 и ∞^0 поверхностныхъ элементовъ, будемъ называть *полными интегральными собраніями Беклунди*, который первый сталъ заниматься ихъ изслѣдованіемъ ¹⁾.

Порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ трехъ разсматриваемыхъ типовъ полныхъ интегральныхъ собраній выражается соотвѣтственно числами

$$2, 1, 0;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ произвольныя постоянныя входятъ въ нихъ соотвѣтственно въ числѣ

$$2, 3, 4.$$

Слѣдовательно, уравненія разсматриваемыхъ собраній зависятъ соотвѣтственно отъ

$$7, 8, 9$$

¹⁾ Bäcklund, A. V.—Ueber systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen. Bd. 11. S. 412—433).

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig. 1900. S. 598.

различныхъ величинъ, изъ которыхъ первыя пять являются переменными x, y, z, p, q , а остальные представляютъ произвольные постоянные параметры.

Поэтому, по отношенію къ данному производному уравненію (27), каждое изъ указанныхъ его полныхъ интегральныхъ собраній всѣхъ типовъ M_2, M_1, M_0 опредѣляетъ ∞^4 значеній всѣхъ входящихъ въ нихъ величинъ какъ переменныхъ такъ и произвольныхъ постоянныхъ, рассматриваемыхъ совмѣстно. Такимъ образомъ задача розысканія указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній данного производнаго уравненія (27) приводится, по терминологіи С. Ли, къ составленію изъ системы ∞^4 *поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемой равенствомъ (27)-ымъ, собраній элементовъ, представляющихъ ∞^4 значеній переменныхъ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ.*

Кромѣ понятій о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ легко составить также понятія объ *общихъ и особенныхъ рѣшеніяхъ, или интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли*, аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ послѣднія рѣшенія, измѣняя произвольныя постоянныя въ полныхъ интегральныхъ собраніяхъ, совершенно подобно классической теоріи уравненій съ частными производными ¹⁾.

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе изслѣдуемаго уравненія (27) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x, a, b), \\ y &= \psi(x, a, b), \\ p &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} q. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Предполагаемъ, что параметры a и b измѣняются одновременно съ переменными x, y, z . Дифференцируя въ этомъ предположеніи первыя два уравненія (28), получимъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial a} da + \frac{\partial \psi}{\partial b} db.$$

¹⁾ См. *Lie—Scheffers*, — Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig. 1896. S.S. 529—535.

Goursat, E. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891. p. 231.

На основаніи послѣднихъ равенствъ, принимая во вниманіе третье уравненіе (28), составляемъ равенство

$$dz - p dx - q dy = A da + B db, \quad (29)$$

гдѣ коэффициенты A и B имѣютъ слѣдующія значенія

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q,$$

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q.$$

Чтобы система (28) не переставала представлять рѣшеніе изслѣдуемаго уравненія (27)-ого также и въ настоящемъ предположеніи, т. е. имѣло мѣсто равенство (6)-ое, для этого очевидно должна уничтожаться тождественно вторая часть равенства (29) и должно имѣть мѣсто равенство

$$A da + B db = 0. \quad (30)$$

Послѣднее имѣетъ три слѣдующихъ различныхъ рѣшенія, которымъ соответствуютъ также различныя *рѣшенія* изслѣдуемаго уравненія (27)-ого:

1) Полагая

$$da = 0, \quad db = 0,$$

т. е. давая a и b постоянныя значенія, мы получаемъ исходное *полное интегральное собраніе*, представленное системой уравненій (28).

2) Предполагая, что имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$A = 0, \quad B = 0,$$

мы представляемъ рѣшеніе уравненія (27)-ого совокупностью равенствъ (28) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q = 0.$$

Результатъ исключенія изъ нихъ параметровъ a и b представляетъ *особенное интегральное собраніе* производнаго уравненія (27).

3) Наконецъ, если a и b связаны произвольной зависимостью

$$a = \omega(b), \quad (31)$$

гдѣ ω представляетъ произвольную функцію, то уравненіе (30) удовлетворяется, на основаніи слѣдующаго равенства

$$A + B \omega' (b) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega' - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega' \right) q = 0, \quad (32)$$

гдѣ ω' обозначаетъ производную функцію ω , взятую по перемѣнной b . Результатъ исключенія параметровъ a и b изъ совокупности уравненій (28), (31), (32) представляетъ, относительно производного уравненія (27), *общее интегральное собраніе*, зависящее отъ одной произвольной функціи ω .

Интегральныя собранія трехъ указанныхъ родовъ получаются изъ каждаго полного интегральнаго собранія всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами типовъ.

Наконецъ, давая какія-либо частныя значенія произвольнымъ постояннымъ или произвольнымъ функціямъ, входящимъ въ полныя или общія интегральныя собранія, мы получаемъ еще такъ называемыя *частныя интегральныя собранія* даннаго производнаго уравненія (27).

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій въ пространствахъ $n+1$ измѣреній. Пусть имѣемъ одно производное уравненіе С. Ли

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (33)$$

опредѣляющее систему ∞^{2n} поверхностныхъ элементовъ въ пространствахъ $n+1$ измѣреній.

Если уравненіе (33) утождествляется, на основаніи уравненій какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* даннаго производнаго уравненія С. Ли.

Рѣшеніе уравненія (33), зависящее отъ нѣсколькихъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ къ одному только данному производному уравненію С. Ли (33), называется его *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Такъ какъ наименьшее число различныхъ уравненій, представляющихъ собраніе элементовъ въ пространствахъ $n+1$ измѣреній, равно $n+1$, то становится очевиднымъ, что число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ полного интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія (33) не можетъ быть меньше числа n . При этомъ мы будемъ различать два случая, когда послѣднее число равно n и больше него.

Если число произвольныхъ постоянныхъ величинъ полного рѣшенія уравненія (33) равняется n , то мы условимся называть послѣднее рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ С. Ли* даннаго производнаго

уравнения (33); если же число произвольныхъ постоянныхъ величинъ больше n , то рассматриваемое рѣшеніе будемъ называть *полнымъ интегральнымъ собраніемъ Беклунда*.

Наконецъ, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, полное интегральное собраніе C . Ли вполне опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Мы условимся называть послѣднее *полнымъ интеграломъ C. Ли* данного производнаго уравненія (33) и различать эти полные интегралы по классамъ, соотвѣтственно классу представляемаго ими геометрическаго мѣста интегральнаго собранія данного производнаго уравненія.

Само собою разумѣется, что полный интегралъ C . Ли нулевого класса представляетъ ничто иное какъ полный интегралъ Лагранжа, по отношенію къ данному уравненію (33), рассматриваемому какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p_1, p_2, \dots, p_n неизвѣстной функціи z соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n . Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется очевидно даннымъ полнымъ интеграломъ Лагранжа и его n производными дифференціальными уравненіями перваго порядка, составленными по правиламъ дифференціального исчисленія.

Наконецъ, приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій C . Ли. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ систему m послѣднихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ n = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Уравненія собранія поверхностныхъ элементовъ, утождествляющія данныя производныя уравненія (34), называются ихъ *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ*.

Рѣшеніе системы данныхъ уравненій (34), заключающее нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ только къ данной системѣ (34), называется ея *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Наименьшее число различныхъ уравненій собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній равно послѣднему числу $n+1$. Поэтому, если уравненія (34) сами по себѣ образуютъ систему совокупныхъ уравненій, то наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ихъ полнаго интегральнаго собранія должно равняться $n-m+1$. Если же уравненія (34) не представляютъ системы совокупныхъ уравненій, т. е. не совмѣстимы и не имѣютъ рѣшенія, но однако приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій при-

бавленіемъ нѣкотораго числа k новыхъ производныхъ уравненій С. Ли. то въ такомъ случаѣ наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ полнаго интегральнаго собранія равно $n - m - k + 1$.

Въ обоихъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ указанная полныя интегральныя собранія принадлежатъ одному и тому же типу собраній элементовъ

$$M_n,$$

которыя мы будемъ называть *полными интегральными собраніями С. Ли*. Каждое изъ нихъ вполне опредѣляется уравненіями своего геометрическаго мѣста; послѣднее мы условимся называть *полнымъ интеграломъ С. Ли* данныхъ производныхъ уравненій.

Что касается всѣхъ остальныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, въ которыхъ число произвольныхъ постоянныхъ больше указанного выше минимальнаго, то мы будемъ называть ихъ *полными интегральными собраніями Беклунда*. Если изслѣдуемая система (34) совместна, то послѣднія полныя рѣшенія зависятъ отъ $n - m + r + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ и представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ вида

$$M_{n-r}, \quad (35)$$

гдѣ число r получаетъ любое изъ значеній въ слѣдующихъ предѣлахъ

$$0 < r \leq n,$$

т. е. полныя рѣшенія Беклунда системы (34) выражаются системой $n - r + 1$ различныхъ уравненій.

Если же уравненія (34) приводятся къ системѣ совместныхъ совокупныхъ уравненій прибавленіемъ k различныхъ новыхъ производныхъ уравненій, то и въ этомъ случаѣ *полныя интегральныя собранія Беклунда* представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ прежняго вида (35), уравненія которыхъ однако, въ настоящемъ случаѣ, зависятъ отъ $n - m - k + r + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Наконецъ, понятія объ особенныхъ, общихъ и частныхъ интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли легко распространяются на пространство $n + 1$ измѣреній ¹⁾.

Пусть имѣемъ, напримѣръ, полное интегральное собраніе С. Ли q -аго класса для уравненій (31), разсматриваемыхъ какъ система совокупныхъ, совместныхъ производныхъ уравненій.

¹⁾ См. *Goursat, E.*—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891. p. 231.

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}), \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}), \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad k = 1, 2, \dots, n-q. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Дифференцируя первые $q+1$ уравнений последней системы въ предположеніи, что вмѣстѣ съ переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n измѣняются также величины $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, получаемъ

$$\begin{aligned} dz &= \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} dC_r, \\ dx_{n-q+i} &= \sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} dC_r, \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

На основаніи этихъ равенствъ и въ силу $n-q$ послѣднихъ уравненій системы (36), составляемъ новое равенство

$$dz - \sum_{k=1}^n p_k dx_k = \sum_{r=1}^{n-m+1} A_r dC_r, \quad (37)$$

гдѣ коэффициенты A_r имѣютъ слѣдующія значенія

$$A_r = \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} p_{n-q+i}.$$

Чтобы, при сдѣланномъ предположеніи относительно измѣняемости произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, уравненія (36) не представляли представлять рѣшеніе уравненій (34), для этого должно удовлетворяться условіе (16)-ое. Поэтому равенство (37) приводится къ слѣдующему

$$\sum_{r=1}^{n-m+1} A_r dC_r = 0, \quad (38)$$

которому должны удовлетворять величины всѣхъ C .

Послѣднее уравненіе можетъ быть удовлетворено слѣдующими различными способами:

1) Равенство (38) удовлетворяется тождественно, если предположить, что всѣ величины C имѣютъ постоянныя значенія. Въ этомъ случаѣ мы возвращаемся къ исходному полному интегральному собранію.

2) Полагая равными нулю всѣ коэффициенты A_r при dC_r въ равенствѣ (38), мы получаемъ систему $n - m + 1$ уравненій

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} p_{n-q+i} = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n - m + 1.$$

Результатъ исключенія всѣхъ C_r изъ уравненій (36), при помощи послѣднихъ равенствъ, представляетъ *особенное интегральное собраніе* системы производныхъ уравненій (34).

3) Предположимъ далѣе, что между $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ существуютъ l произвольныхъ зависимостей слѣдующаго вида

$$C_i = \omega_i (C_{l+1}, C_{l+2}, \dots, C_{n-m+1}), \quad \left. \begin{array}{c} i = 1, 2, \dots, l. \end{array} \right\} \quad (39)$$

гдѣ всѣ ω_i представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ. Внося значенія всѣхъ C_i въ равенство (38), получаемъ новое равенство

$$\sum_{j=1}^{n-m-l+1} \left(A_{l+j} + \sum_{i=1}^l A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial C_{l+j}} \right) dC_{l+j} = 0,$$

которое уничтожается на основаніи слѣдующихъ зависимостей

$$\left. \begin{array}{c} A_{l+j} + \sum_{i=1}^l A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial C_{l+j}} = 0. \\ j = 1, 2, \dots, n - m - l + 1. \end{array} \right\} \quad (40)$$

Результатъ исключенія, изъ уравненій (36), значеній всѣхъ $n - m + 1$ величинъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, при помощи $n - m - 1$ уравненій (39) — (40), представляетъ *общее интегральное собраніе* системы (34), заключающее l произвольныхъ функцій.

Наконецъ, мы называемъ *частными рѣшеніями*, или *частными интегральными собраніями* данной системы (34) рѣшенія ея, которыя получаются изъ полныхъ или общихъ интегральныхъ собраній, сообще-

ніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ параметрамъ и произвольнымъ функціямъ, которые входятъ въ эти собранія.

8. Изъ предыдущихъ разсужденій непосредственно вытекаетъ, что каждое уравненіе или систему уравненій, съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ переменнымъ, возможно разсматривать также и съ другой точки зрѣнія, какъ производныя уравненія С. Ли, происхожденіе которыхъ основано на разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ.

Обобщенныя представленія С. Ли о производныхъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніяхъ, какъ это представляется съ перваго взгляда, расширяютъ, съ формальной точки зрѣнія, предѣлы классической теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Дѣйствительно, въ изложенной выше теоріи собраній поверхностныхъ элементовъ, представленія объ уравненіяхъ съ частными производными и объ ихъ интегралахъ являются только въ видѣ одного частнаго случая. Въ самомъ дѣлѣ, останавливаясь на собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ нулевого класса, происходящихъ изъ нихъ производныхъ уравненій С. Ли и ихъ интегральныхъ собраніяхъ, мы получаемъ классическую теорію дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которая представляетъ такимъ образомъ частный случай теоріи С. Ли.

Однако разсматривая одни и тѣ же уравненія, то съ точки зрѣнія дифференціальныхъ уравненій, то съ точки зрѣнія производныхъ уравненій С. Ли, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны видоизмѣнять соотвѣтственно каждый разъ и самый характеръ изслѣдуемыхъ уравненій, которыя сохраняютъ одинъ только внѣшній видъ, благодаря сохраненію обозначеній входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, смыслъ разсматриваемыхъ уравненій становится совершенно различнымъ. С. Ли вводитъ цѣлый рядъ новыхъ рѣшеній изслѣдуемыхъ уравненій, которыя до него не разсматривались, при чемъ каждому классу новыхъ рѣшеній соотвѣтствуютъ также и новыя дополнительные предположенія относительно входящихъ въ нихъ переменныхъ. Такъ, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, переменныя x_1, x_2, \dots, x_n считаются независимыми; что же касается рѣшеній С. Ли q -аго класса, то они вводятъ q различныхъ зависимостей между тѣми же переменными x_1, x_2, \dots, x_n . Такимъ образомъ переменныя, которыя считались независимыми въ классической теоріи, перестаютъ быть таковыми въ теоріи С. Ли. Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, и переменные параметры p_1, p_2, \dots, p_n измѣняютъ свое первоначальное значеніе частныхъ производныхъ, въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Всѣ послѣднія обстоятельства приобрѣтають особенное значеніе, съ точки зрѣнія приложений къ различнымъ вопросамъ анализа и геометріи. Само собою разумѣется, что рѣшенія С. Ли не могутъ давать искомага отвѣта для тѣхъ задачъ, которыя приводятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными. Съ другой стороны могутъ существовать также такіе прикладные вопросы, которые требуютъ, для своего рѣшенія, рассмотрѣнія производныхъ уравненій С. Ли или разрѣшаются, какъ при помощи интеграловъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, такъ и на основаніи интегральныхъ собраній производныхъ уравненій С. Ли. Въ виду изложенныхъ соображеній, мы считаемъ необходимымъ дѣлать существенное различіе между дифференціальными уравненіями классической теоріи, производными уравненіями С. Ли и между ихъ рѣшеніями различныхъ классовъ. Поэтому намъ кажется необходимымъ возражать и быть противъ изложенія нѣкоторыхъ трактатовъ по теоріи дифференціальныхъ уравненій, которыя смѣшиваютъ рѣшенія различныхъ классовъ. Такъ, напримѣръ, при изложеніи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, по такъ называемому способу характеристикъ Коши, многіе авторы ¹⁾ удовлетворяются указаніями на полные интегралы С. Ли въ тѣхъ случаяхъ исключенія, когда излагаемый способъ Коши не приводитъ къ искомымъ полнымъ интеграламъ Лагранжа. Читатель не можетъ быть удовлетворенъ такимъ изложеніемъ, такъ какъ упомянутые авторы не даютъ отвѣта на поставленный вопросъ во всей полнотѣ и предлагаютъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ удовлетворяться совершенно случайно полученными новыми рѣшеніями, которыя, какъ ясно видно, представляютъ существенное различіе съ первоначально поставленной задачей интегрированія. Совершенно аналогичнымъ образомъ насъ не удовлетворяетъ также интегрированіе производныхъ уравненій С. Ли, по такъ называемому обобщенному имъ способу характеристикъ Коши, который не даетъ возможности вычислять полные интегралы С. Ли заданнаго напередъ опредѣленнаго класса, но приводитъ совершенно непредвидѣннымъ образомъ, или къ нѣкоторому полному интегралу С. Ли какого-либо случайнаго класса, или даже къ полному интегралу Лагранжа. Такимъ образомъ разсматриваемый способъ С. Ли оставляетъ полную неопредѣленность въ рѣшеніи изслѣдуемой задачи. совершенно аналогично указанному выше способу Коши.

Всѣ отмѣченные вопросы теоріи характеристикъ находятся въ связи съ дальнѣйшимъ развитіемъ нашего изслѣдованія, и мы будемъ имѣть

¹⁾ *Jordan, C.*—Cours d'Analyse, t. III. Paris, 1887. p. 325.

Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1891. p. 119, p. 228.

случай къ нимъ далѣе возвратиться. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли различныхъ классовъ, то задача ихъ разысканія зависитъ главнымъ образомъ отъ условій ихъ существованія для производныхъ уравненій С. Ли.

Если возьмемъ одно производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ трехъ измѣреній, то, какъ видно изъ предыдущаго изложенія (см. стр. 21—22), рассматриваемое уравненіе допускаетъ полныя интегральныя собранія M^1_2 , M^0_2 только при условіи, что оно является линейнымъ относительно переменныхъ p , q или не зависитъ отъ послѣднихъ, т. е. представляетъ функциональную зависимость между переменными x , y , z . Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ слѣдовать, что и другія производныя уравненія С. Ли должны также представлять весьма частный видъ, для того чтобы допускать существованіе полныхъ интеграловъ С. Ли того или другого опредѣленнаго даннаго класса. Однако доказательство послѣдняго предложенія находится въ зависимости отъ общихъ свойствъ интегральныхъ собраній, къ изученію которыхъ мы и имѣемъ въ виду немедленно приступить. Наконецъ, въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы ограничимся разсмотрѣніемъ только полныхъ интеграловъ С. Ли его производныхъ уравненій, въ виду того что теорія ихъ находится въ тѣсной связи съ задачей интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

Г Л А В А II.

Свойства полных интегральных собраний С. Ли.

1. Пусть имѣемъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній производное уравненіе С. Ли слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Предположимъ, что данное уравненіе разрѣшимо относительно переменн-ной p_1 , такъ что имѣетъ мѣсто условіе

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0. \quad (2)$$

Пусть рассматриваемое уравненіе (1) допускаетъ полный интеграль С. Ли q -аго класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} z - q(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ послѣдними, полное интегральное собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній и представляющіяся въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \frac{\partial q}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial q_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$k = 1, 2, \dots, n-q.$

Введемъ слѣдующее условное обозначеніе

$$p_k \equiv \frac{\partial q}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial q_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$k = 1, 2, \dots, n-q.$

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы. <i>В. П. Ермакова.</i>	49
По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ: „Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы“. <i>А. Н. Коркина.</i>	51
Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. <i>Н. Н. Салтыкова.</i>	60

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества издаются подъ редакцію распорядительнаго комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть выпусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 нумеровъ, 1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи (48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества, просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій Университетъ.

Table des matières.

Pages.

Sur les équations différentielles du premier ordre admettant un multiplicateur de la forme factorielle; par <i>M. W. Ermakoff</i>	49
Remarque relative au Mémoire de <i>M. W. Ermakoff</i> : „Sur les équations différentielles du premier ordre admettant un multiplicateur de la forme factorielle“; par <i>M. A. Korkin</i>	51
Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue: <i>M. N. Saltykov</i>	60

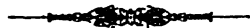
Sci 905.75
Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 3.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 3.



ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-Б).

1905.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

такъ что послѣднія $n - q$ уравненій разсматриваемаго полного интегральнаго собранія становятся

$$\left. \begin{aligned} p_k - \psi_k &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n - q, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

гдѣ функціи ψ_k линейны относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$ и зависятъ кромѣ того только отъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-q} .

Изученіе свойствъ полныхъ интеграловъ S . Ли мы начнемъ съ разсмотрѣнія собраній нулевого класса, т. е. приведемъ основныя свойства полныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій: Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) разсматривается какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, и совокупность соотвѣствующихъ уравненій (3) — (4) становится

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы, въ этомъ случаѣ, первое изъ уравненій (5) представляло дѣйствительно полный интеграль даннаго уравненія (1), т. е. результатъ исключенія всѣхъ C изъ уравненій (5) представлялъ бы уравненіе (1). для этого, какъ хорошо извѣстно, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функциональнаго опредѣлителя

$$D \left(\begin{array}{c} \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \end{array} \right) \neq 0.$$

Легко видѣть, что, на основаніи послѣдняго неравенства, въ опредѣленной разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ величинъ, система уравненій (5) приводится къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) &= 0, \\ F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) &= C_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Такъ какъ опредѣляемые послѣдними уравненіями значенія переменнаго z, p_1, p_2, \dots, p_n выражаются равенствами (5), т. е. p_1, p_2, \dots, p_n являются частными производными перваго порядка функціи z соотвѣт-

ственно по независимым переменным x_1, x_2, \dots, x_n , то последние $n + 1$ уравнений образуют замкнутую систему, т. е., на основании первой из этих уравнений, имеют место следующие равенства

$$[F_i, F_k] = 0,$$

львыя части которых обозначают скобки Вейлера ¹⁾, составленные для всех значений показателей i, k , от 0 до n , при чем под F_0 разумеется функция F .

Как известно из курсов теории частных дифференциальных уравнений, имеет место также следующее обратное предложение:

Пусть имеем совокупность n уравнений, с n различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_n ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

разрешимых относительно всех C и образующих, совместно с данным уравнением (1)-ым, замкнутую систему $n+1$ дифференциальных уравнений. Если последняя разрешима относительно всех переменных p_1, p_2, \dots, p_n , а также определяет значение переменной z , функцией переменных x_1, x_2, \dots, x_n и всех произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , то последнее значение z представляет полный интеграл данной уравнения (1)-ого.

Наконец, пусть полный интеграл Лагранжа (5) представляется в следующем виде

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_n, \dots, C_{n-1}) + C_n, \quad (6)$$

где одна из произвольных постоянных, именно C_n , является такъ называемой придаточной. Если следующий функциональный определитель

$$D \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, то последние $n - 1$ производных уравнений следующей системы

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹⁾ См. мое исследование: *Объ интегрировании уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции*, стр. 39.

разрѣшимы относительно постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Въ такомъ случаѣ результатъ ихъ исключенія изъ перваго производнаго уравненія послѣдней системы представляетъ наше дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое очевидно не зависитъ отъ переменн- ной z и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (8)$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, совокупность уравненій (6) и (7) приводится, внутри разсматриваемой области измѣненія переменныхъ, къ системѣ, представляющей совокупность уравненія (8) и слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_n.$$

Предыдущее обратное предложеніе замѣняется, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующимъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произволь- ными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совместно съ урав- неніемъ (8), замкнутую систему n дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то полный интегралъ даннаго уравненія (8) определяется при помощи квадратуры.

2. Всѣ приведенныя предложенія, характеризующія полныя инте- гральныя собранія C . Ли нулевого класса распространяются также на всѣ полныя интегральныя собранія C . Ли, общій видъ которыхъ пред- ставляется совокупностью равенствъ (3) и (4).

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы послѣднія уравненія дѣйствительно пред- ставляли полное интегральное собраніе производнаго уравненія C . Ли (1), результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , изъ уравне- ній (3) и (4), долженъ приводиться къ одному только уравненію (1). Для этого очевидно достаточно существованія слѣдующаго условія

$$D\left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_n}\right) \neq 0.$$

Дѣйствительно, если послѣднее неравенство имѣетъ мѣсто, то уравненія (3) и послѣднія $n - q - 1$ уравненій (4) разрѣшимы относительно всѣхъ величинъ C_1, C_2, \dots, C_n , и результатъ ихъ исключенія, изъ перваго уравненія (4), приводится къ равенству, равносильному исходному уравненію (1). Поэтому, въ опредѣленной рассматриваемой области измененія нашихъ перемѣнныхъ, система уравненій (3)—(4) приводится къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= C_s, \end{aligned} \quad (9)$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

гдѣ послѣднія n уравненій представляютъ результатъ рѣшенія указанныхъ выше уравненій относительно всѣхъ постоянныхъ C .

Чтобы приступить къ изученію свойствъ послѣднихъ уравненій, начнемъ съ распространенія понятій объ *инволюціи* и *замкнутости* производныхъ уравненій С. Ли. Аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, мы условимся называть, также въ теоріи производныхъ уравненій С. Ли, величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

каноническими перемѣнными, относя n первыя изъ нихъ къ *первому классу*, а остальные n величинъ ко *второму классу каноническихъ перемѣнныхъ*. Составляя скобки Пуассона для двухъ функцій, зависящихъ отъ послѣднихъ перемѣнныхъ, или скобки Вейлера, если рассматриваемыя функціи заключаютъ еще новую $2n + 1$ -ую перемѣнную z , мы говоримъ, что эти функціи находятся въ *инволюціи*, если указанные скобки уничтожаются тождественно. Наконецъ, мы говоримъ, что данныя уравненія образуютъ *систему въ инволюціи* или *замкнутую систему* въ зависимости отъ того, уничтожаются-ли тождественно скобки Пуассона и Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей данныхъ уравненій, или эти скобки уничтожаются, на основаніи послѣднихъ уравненій.

Наконецъ, само собою разумѣется, если какая-либо данная система производныхъ уравненій С. Ли-*замкнутая*, то и преобразованныя ея уравненія образуютъ также *замкнутую систему*.

Условившись въ предыдущихъ опредѣленіяхъ, докажемъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ замкнутую систему.

Рассматривая всѣ величины ψ_k , какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$, замѣтимъ прежде всего, что существуютъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\kappa}},$$

$$\frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{\kappa}},$$

для всѣхъ различныхъ значений показателей k и j , отъ 1 до $n - q$, и показателей i , отъ 1 до q .

Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (3) и (4), имѣютъ слѣдующія значенія

$$[z - \varphi, x_{n-q+i} - \varphi_i] \equiv 0,$$

$$\left[z - \varphi, p_{\kappa} - \psi_{\kappa} \right] \equiv -p_{\kappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^q \frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i} = 0,$$

$$\left[x_{n-q+i} - \varphi_i, p - \psi_{\kappa} \right] \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0,$$

$$\left[p_j - \psi_j, p_{\kappa} - \psi_{\kappa} \right] \equiv -\frac{\partial \psi_{\kappa}}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{\kappa}} \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значений, которыя должны принимать показатели i , k и j ; при этомъ разсматриваемыя равенства первой, третьей и четвертой строкъ удовлетворяются тождественно, тогда какъ равенство второй строки удовлетворяется на основаніи уравненій (4).

Полученныя равенства доказываютъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ *замкнутую систему*. Слѣдовательно, уравненія (9), представляющія преобразование послѣднихъ, также образуютъ *замкнутую систему*.

Кромѣ того очевидно, что уравненія (9) заключаютъ $q + 1$ зависимостей только между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , такъ какъ разсматриваемое интегральное собраніе принадлежитъ къ q -ому классу.

Легко показать, что *оба послѣднія свойства вполне определяютъ аналитически уравненія, представляющія полное интегральное собраніе S . Ли q -аго класса даннаго уравненія (1).*

Дѣйствительно, пусть имѣемъ n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_n ,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшмы относительно всѣхъ постоянныхъ C и, съ другой стороны, совместно съ даннымъ уравненіемъ (1), опредѣляютъ z и q переменныхъ, изъ числа x_1, x_2, \dots, x_n , функциями остальныхъ $n - q$ изъ этихъ переменныхъ и произвольныхъ постоянныхъ.

Если кромѣ того наши $n + 1$ уравненій (1) и (10) образуютъ замкнутую систему, то, въ такомъ случаѣ, легко доказать, что они представляютъ полное интегральное собраніе C . Ли q -аго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно убѣдиться прежде всего, что рассматриваемыя уравненія должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ p_\kappa - \psi'_\kappa(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

т. е. разрѣшаются относительно переменныхъ x и p съ различными значками ¹⁾. Для доказательства послѣдняго предложенія сдѣлаемъ противоположное допущеніе, а именно, что k -ое изъ $n - q$ послѣднихъ уравненій разрѣшается относительно переменной p_{n-q+i} и приводится къ слѣдующему виду

$$p_{n-q+i} - \psi'(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_{n-q+i-1}, p_{n-q+i+1}, \dots, p_n) = 0,$$

т. е. не должно зависеть ни отъ одной изъ переменныхъ p_κ , такъ какъ онѣ исключаются, согласно съ послѣднимъ сдѣланнымъ предположеніемъ. Вычисляя слѣдующія скобки Вейлера

$$[x_{n-q+i} - \varphi'_i, p_{n-q+i} - \psi'],$$

видимъ, что онѣ обращаются тождественно въ единицу. Но по первоначально поставленному условію, относительно замкнутости системы данныхъ уравненій (1) и (10), необходимо, чтобы послѣднія скобки, или уничтожались, на основаніи послѣднихъ уравненій, или обращались тождественно въ нуль. Такимъ образомъ сдѣланное предположеніе, относительно разрѣшимости системы уравненій (1) и (10), приводитъ къ заключенію, противорѣчающему дѣйствительности, что и убѣждаетъ насъ въ справедливости первоначально сдѣланнаго допущенія относительно того, что рассматриваемая нами совокупность уравненій (1) и (10) приводится къ виду (11).

¹⁾ S. Lie. Mathematische Annalen. Bd. XI, S. 277.

S. Lie u. Engel. — Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt S. 94.

Само собою разумѣется, что, на основаніи послѣднихъ равенствъ, утолждается данное уравненіе (1) и вмѣстѣ съ тѣмъ оно получается какъ единственный результатъ исключенія всѣхъ C изъ предыдущихъ равенствъ (11).

Кромѣ того послѣднія уравненія (11) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ и исходныя уравненія представляютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (11) должны уничтожаться, въ силу послѣднихъ. Эти скобки имѣютъ слѣдующія значенія

$$\begin{aligned} \left[z - \varphi', p_{\kappa} - \psi_{\kappa}' \right] &= -p_{\kappa} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\kappa}} + \\ &+ \sum_{i=1}^q \frac{\partial \psi_{\kappa}'}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i}, \\ \left[x_{n-q+i} - \varphi_i', p_{\kappa} - \psi_{\kappa}' \right] &= \frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial \psi_{\kappa}'}{\partial p_{n-q+i}}, \end{aligned}$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n - q$, и значеній i , отъ 1 до q . Такъ какъ правая часть послѣднихъ скобокъ не зависитъ отъ переменныхъ

$$z, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-q},$$

то она не можетъ уничтожаться, на основаніи уравненій (11), но должна быть равна нулю тождественно. Такимъ образомъ мы получаемъ тождества

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial \psi_{\kappa}'}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0, \text{ или } \frac{\partial \psi_{\kappa}'}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_{\kappa}},$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q , и значеній k , отъ 1 до $n - q$. Что касается первыхъ скобокъ, то онѣ должны уничтожаться, на основаніи послѣднихъ $n - q$ уравненій (11). Поэтому, въ силу только что сейчасъ написанныхъ тождествъ, получаемъ новыя тождества

$$\begin{aligned} \psi_{\kappa}' &\equiv \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\kappa}} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_{\kappa}} p_{n-q+i}, \\ \kappa &= 1, 2, \dots, n - q, \end{aligned}$$

которые и доказываютъ, что система (11) опредѣляетъ полное интегральное собраніе C . Ли q -аго класса.

Изъ доказаннаго предложенія вытекаетъ, что совокупность уравненій (9) должна представлять замкнутую систему и кромѣ того разрѣ-

таться только относительно $n - q$ изъ ряда переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , для того чтобы определять полное интегральное собраніе S . Ли q -аго класса производнаго уравненія (1).

Другими словами это второе условіе показываетъ, что функции

$$F, F_1, F_2, \dots, F_n$$

не должны быть различными относительно переменныхъ z, p_1, p_2, \dots, p_n , т. е. долженъ тождественно уничтожаться не только функциональный определитель

$$D \left(\frac{F, F_1, F_2, \dots, F_n}{z, p_1, p_2, \dots, p_n} \right),$$

но также и всѣ его миноры, отъ перваго до q -аго порядка включительно.

Выведенное заключеніе является существеннымъ, характернымъ свойствомъ полныхъ интегральныхъ собраній S . Ли, которое, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, находится въ числѣ необходимыхъ и достаточныхъ условій, опредѣляющихъ вполнѣ послѣднія собранія.

Остановимся далѣе на разсмотрѣніи того частнаго случая, когда полное интегральное собраніе какого-либо производнаго уравненія S . Ли представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) + C_n \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} p_\kappa &= \psi_\kappa, \\ \kappa &= 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при чемъ произвольная постоянная C_n является придаточной, которая не входитъ въ выраженія всѣхъ функций φ , φ_i и ψ_κ .

Если слѣдующій функциональный определитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_q, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_{n-1}} \right) \neq 0,$$

то очевидно, что система уравненій, составленная изъ q послѣднихъ (12) и $n - q - 1$ послѣднихъ (13), разрешима относительно всѣхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Результатъ исключенія послѣднихъ изъ перваго уравненія (13) приводитъ къ производному уравненію S . Ли, независимаго отъ переменнаго z , слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (14)$$

которое, въ разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, разрѣшимо относительно переменной p_1 , такъ какъ первое уравненіе (13) представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно послѣдней переменной.

Поэтому, въ этой же области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ, система уравненій (12) и (13), аналогично дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, представляется совокупностью уравненій (14)-ого и n слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_n.$$

Обратное предложеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совместно съ уравненіемъ (14), замкнутую систему n производныхъ уравненій. Если послѣдняя не разрѣшима относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то полный интегралъ C . Ли получается при помощи квадратуры.

Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что наша замкнутая система n уравненій выдѣляетъ q зависимостей, не заключающихъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , и приводится къ виду

$$\left. \begin{aligned} x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ p_\kappa &= \psi_\kappa(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, q, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n-q.$$

Чтобы доказать наше предложеніе, поступаемъ аналогично предыдущему. Такъ какъ послѣдняя система должна быть замкнутой, то составляя скобки Пуассона

$$(x_{n-q+i}, \varphi_i, p_\kappa - \psi_\kappa),$$

которые должны уничтожаться тождественно, получаемъ отсюда тождества

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q , и значеній k , отъ 1 до $n-q$, которыя показываютъ, что функции Ψ_k линейны относительно переменныхъ p_{n-q+i} и имѣютъ, стало-быть, слѣдующій видъ

$$\Psi_k = A_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$k = 1, 2, \dots, n-q.$

Далѣе, приравнивая нулю значенія скобокъ

$$(p_i - \Psi_i, p_k - \Psi_k),$$

получаемъ, совершивъ сокращенія, новыя тождества

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k , отъ 1 до $n-q$. Последнія тождества показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{k=1}^{n-q} A_k dx_k$$

представляетъ точный дифференціалъ ¹⁾. Поэтому, выполнивъ квадратуру послѣдняго, легко видѣть, что уравненіе

$$z = \int \sum_{k=1}^{n-q} A_k dx_k + C_n,$$

совмѣстно съ системой (15)-ой, опредѣляетъ полное интегральное собраніе S . Ли даннаго производнаго уравненія (14).

3. Всѣ приведенныя соображенія, относительно одного производнаго уравненія (1) или (14), распространяются также на системы совокупныхъ производныхъ уравненій S . Ли, происхожденіе которыхъ мы рассматривали въ предыдущей главѣ.

Пусть имѣемъ систему m производныхъ уравненій S . Ли

¹⁾ См. моя статья: Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences, 17 août 1903).

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

которая имѣетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}) &= 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Вводя аналогичное предыдущему обозначеніе функций ψ_k , которыя въ настоящемъ случаѣ заключаютъ только $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, составляемъ дополнителныя уравненія, опредѣляющія, совместно съ уравненіемъ геометрическаго мѣста (17), полное интегральное собраніе С. Ли данной системы (16)-ой

$$\left. \begin{aligned} p_k - \psi_k &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n - q. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Чтобы система уравненій (17)—(18) представляла дѣйствительно полный интегралъ С. Ли данной системы уравненій (16), для этого результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, изъ уравненій разсматриваемаго интегральнаго собранія, долженъ приводиться къ однимъ только исходнымъ уравненіямъ (16)-ымъ.

Предположимъ, что послѣднія разрѣшмы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , т. е. что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m}\right) \neq 0. \quad (19)$$

Въ такомъ случаѣ равенства, которыя представляютъ непосредственный результатъ исключенія всѣхъ значеній $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ изъ уравненій нашего интегральнаго собранія (17)—(18), должны также быть разрѣшмы относительно величинъ p_1, p_2, \dots, p_m . Послѣднее условіе удовлетворяется, на примѣръ, когда уравненія (17) и послѣднія $n - q - m$ уравненій (18) разрѣшмы относительно всѣхъ C . Въ такомъ случаѣ, чтобы разсматриваемое интегральное собраніе опредѣляло полный интегралъ С. Ли данной системы (16), для этого достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_{n-m+1}}\right) \neq 0. \quad (20)$$

Если геометрическое мѣсто разсматриваемаго интегральнаго собранія представлено уравненіями

$$z = g_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}) + C_{n-m+1},$$

$$x_{n-q+i} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}),$$

$$i=1, 2, \dots, q,$$

гдѣ произвольная постоянная C_{n-m+1} является придаточной, то система соответствующихъ производныхъ уравненій С. Ли не зависитъ явно отъ перемѣнной величины z . Поэтому, чтобы написанныя уравненія представляли полный интеграль С. Ли для производныхъ уравненій, которыя получаются, исключеніемъ произвольныхъ постоянныхъ изъ предыдущихъ уравненій, для этого, на примѣръ, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D \left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_q, C_{q+1}, \dots, C_{n-m}} \right) \neq 0.$$

Какъ легко видѣть, если $q=0$, то мы имѣемъ дѣло съ полнымъ интеграломъ Лагранжа системы уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Въ этомъ случаѣ уравненія (17) и (18) опредѣляютъ полный интеграль Лагранжа и его производныя уравненія, а предыдущее неравенство (20) представляетъ извѣстное условіе, которому удовлетворяютъ полныя интегралы Лагранжа изслѣдуемыхъ уравненій.

Составляя непосредственно скобки Вейлера для лѣвыхъ частей уравненій (17) и (18), мы очевидно приходимъ къ заключенію, что послѣднія уравненія образуютъ замкнутую систему и, въ разсматриваемой нами области измѣненія перемѣнныхъ, приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ F_{m+s}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= C_s, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m+1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m, F_{m+1}, \dots, F_{n+1}}{z, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, \dots, p_n} \right) \quad (22)$$

уничтожается тождественно со всѣми своими минорами, отъ перваго до q -аго порядка включительно.

Отсюда вытекает прежде всего слѣдующее весьма существенное заключеніе относительно условій, которымъ должны удовлетворять произвольныя уравненія C . Ли, чтобы составлять систему совокупныхъ уравненій, допускающихъ полныя интегральныя собранія C . Ли. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (21), представляя преобразования равенствъ (17) и (18), образуютъ также замкнутую систему. Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_m,$$

не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, то эти скобки могутъ уничтожаться только въ силу первыхъ m уравненій системы (21), которыя представляютъ систему данныхъ уравненій (16). Потому мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы имѣть полныя интегральныя собранія, совокупныя производныя уравненія C . Ли необходимо должны представлять замкнутую систему, совершенно аналогично совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, т. е. скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій, должны уничтожаться на основаніи этихъ уравненій.

Само собою разумѣется, если данныя уравненія (16) не удовлетворяютъ условію замкнутости, то для разысканія ихъ рѣшеній должно поступать совершенно такъ, какъ поступаютъ въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій. Такъ, если скобки Вейлера, составленныя для двухъ какихъ либо функцій, напримѣръ, F_i и F_k не уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій (16), то, приравнивая составленныя скобки нулю, присоединяемъ вновь полученное уравненіе къ предыдущимъ исходнымъ уравненіямъ. Продолжая поступать такимъ образомъ и далѣе, относительно каждой пары разсматриваемыхъ уравненій, мы, или придемъ, въ концѣ концовъ, къ замкнутой системѣ производныхъ уравненій, или получаемъ такую систему, число уравненій которой больше $2n + 1$; въ послѣднемъ случаѣ, или всѣ переменныя величины получаютъ постоянныя значенія, или разсматриваемыя уравненія несовмѣстимы.

Совершенно аналогично тому какъ мы доказывали по отношенію къ одному уравненію, такъ и здѣсь, для системы производныхъ уравненій C . Ли, также легко убѣдиться, что отмѣченныя выше свойства, характеризующія полныя интегральныя собранія C . Ли, являются не только необходимыми, но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными условіями, чтобы система уравненій, вида (21), определяла полный интегралъ C . Ли, а именно послѣднія уравненія должны образовать замкнутую систему и соответствующій имъ функціональный опредѣлитель, вида (22), долженъ уничтожаться тождественно со всеми своими минорами, отъ пер-

ваго порядка до q -аго включительно, если соответствующій полный интегралъ принадлежит q -ому классу.

Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить значеніе, которое представляетъ опредѣлитель (22), для опредѣленія класса полного интеграла, представляемого системой (21). Для полного интеграла нулевого класса, т. е. интеграла Лагранжа уравненій (16), рассматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными, функціональный опредѣлитель (22) долженъ быть отличенъ отъ нуля. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли, то соответствующій имъ функціональный опредѣлитель (22) долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами до порядка, равнаго классу рассматриваемаго интеграла.

4. Послѣднія доказанныя предложенія устанавливають однообразную точку зрѣнія на задачи о разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа и С. Ли. Эта точка зрѣнія вытекаетъ изъ идеи, лежащей въ основаніи извѣстнаго второго способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, изложеннаго въ знаменитомъ мемуарѣ: *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quaecunque propositas integrandi*¹⁾.

Развитіе идей, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, позволитъ намъ представить въ новомъ видѣ указанныя выше свойства полныхъ интегральныхъ собраній. Начнемъ съ рассмотрѣнія случая одного уравненія (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Сущность рассматриваемаго способа Якоби состоитъ въ разысканіи обладающихъ опредѣленными свойствами $n+1$ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи f переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$, рассматриваемыхъ какъ независимыя переменныя, слѣдующаго вида

$$[F, f] = 0. \quad (23)$$

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя попарно изъ $n+1$ функцій

$$F, F_1, F_2, \dots, F_n, \quad (24)$$

опредѣляющихъ полное интегральное собраніе (9) данного уравненія (1), не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , то эти скобки

¹⁾ *Jacobi. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 60. p. 1—181. Gesammelte Werke, Bd. V. S. 1—189.*

должны уничтожаться вообще въ силу даннаго уравненія (1). Въ частности, чтобы уравненія (9) составляли замкнутую систему, достаточно, чтобы функціи (24) находились въ инволюціи между собой.

Поэтому выведенное выше условіе, характеризующее полныя интегральныя собранія С. Ли одного производнаго уравненія, формулируется также слѣдующимъ образомъ:

Чтобы уравненія (9) определяли полное интегральное собраніе даннаго уравненія (1), для этого достаточно, чтобы функціи

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

представляли систему n интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія (23). Классъ послѣдняго собранія, само собою разумѣется, определяется, на основаніи свойствъ функціональнаго опредѣлителя

$$D \left(\frac{F, F_1, \dots, F_n}{z, p_1, p_2, \dots, p_n} \right).$$

Послѣднее предложеніе легко представить еще другимъ образомъ.

Предположимъ, что данное производное уравненіе не зависитъ явнымъ образомъ отъ перемѣнной величины z , т. е. мы имѣемъ дѣло съ производнымъ уравненіемъ (14), которое, будучи разрѣшимымъ относительно перемѣнной p_1 , приводится къ виду

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (25)$$

Легко видѣть, что уравненія рассмотрѣннаго въ n^0 2-омъ полного интегральнаго собранія уравненія (14)-аго преобразовываются въ систему уравненій (25)-аго и слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1, \\ z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_n. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для какого угодно класса изслѣдуемаго собранія, въ виду предложенія, которое мы доказали въ концѣ n^0 2-ого, при чемъ здѣсь функціи F_s и F_n не зависятъ отъ перемѣнной p_1 .

Очевидно, что уравненіе (25) и первыя $n-1$ уравненій (26) находятся въ инволюціи, такъ какъ соотвѣтствующія имъ скобки Пуассона не зависятъ, ни отъ перемѣнной p_1 , ни отъ величинъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} .

Слѣдовательно, первые $n-1$ уравнений (26) представляют интегралы въ инволюции канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравнений, соответствующихъ производному уравненію (25),

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$k=1, 2, \dots, n.$$

Наконецъ, послѣднее уравненіе (26) получается при помощи квадратуры, составленной известнымъ образомъ, на основаніи предыдущихъ интеграловъ.

Возвращаясь къ первоначальному уравненію (1), разрѣшаемъ его также относительно переменнѣй p_1 и получаемъ

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (27)$$

Само собою разумѣется, что преобразованная система (9) опредѣляетъ полное интегральное собраніе послѣдняго уравненія (27)-ого, представленное послѣднимъ уравненіемъ и слѣдующими

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = C_s, \quad \left. \begin{array}{l} s=1, 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (28)$$

при чемъ функціи F_s не заключаютъ болѣе переменнѣй p_1 , и классъ послѣдняго собранія остается тотъ же, что и собранія (9)-аго.

Такъ какъ уравненія (27) и (28) образуютъ замкнутую систему, то очевидно, что скобки Вейлера

$$[p_1 + H, F_s],$$

какъ зависящія отъ переменнѣй p_1 и не заключающія величинъ C_s , должны уничтожаться, на основаніи уравненія (27), и мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - \frac{\partial F_s}{\partial z} H + [H, F_s] = 0,$$

гдѣ послѣднія скобки Вейлера распространяются только на переменныя величины

$$x_2, x_3, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n.$$

Стало-быть, уравненія (28) представляют систему интеграловъ въ инволюции слѣдующей обобщенной канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій ¹⁾

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$\frac{dz}{dx_1} = \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} \frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} - H,$$

$$k=2, 3, \dots, n.$$

Изложенныя предложенія распространяются безъ всякаго труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Пусть имѣемъ систему слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (29)$$

которая имѣетъ полное интегральное собраніе, представленное уравненіями (21).

Предположимъ, что данныя уравненія (29) представляютъ систему въ инволюции.

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ всѣхъ $n+1$ функций F попарно, не зависятъ отъ величинъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, то эти скобки уничтожаются вообще, на основаніи данныхъ уравненій (29), или уничтожаются иногда тождественно, т. е., въ этомъ послѣднемъ случаѣ, всѣ функции F находятся въ инволюции между собой. Чтобы система (21) представляла полное интегральное собраніе для этого достаточно одного послѣдняго условія, т. е. чтобы имѣли мѣсто тождества

$$[F_i, F_{m+s}] = 0, \quad \left. \begin{array}{l} s=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (30)$$

для всѣхъ значеній указателя s , отъ 1 до $n-m+1$.

Составляемъ слѣдующія линейныя уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функции f по переменнымъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

разсматриваемымъ какъ независимыя,

¹⁾ Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функции*, стр. 69.

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] &= 0, \\ &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Извѣстное тождество Майера ¹⁾, которому удовлетворяють скобки Вейлера, составленныя для трехъ функций F_i , F_k и f представляется равенствомъ

$$\begin{aligned} & \left[F_i, [F_k, f] \right] + \left[F_k, [f, F_i] \right] + \left[f, [F_i, F_k] \right] = \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial z} [F_k, f] + \frac{\partial F_k}{\partial z} [f, F_i] + \frac{\partial f}{\partial z} [F_i, F_k]. \end{aligned}$$

Такъ какъ данныя уравненія (29) находятся въ инволюціи, то скобки $[F_i, F_k]$ уничтожаются тождественно, и предыдущее равенство даетъ новое равенство

$$\begin{aligned} & \left[F_i, [F_k, f] \right] - \left[F_k, [F_i, f] \right] = \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial z} [F_k, f] - \frac{\partial F_k}{\partial z} [F_i, f], \end{aligned}$$

которое показываетъ, что линейныя уравненія (31) образуютъ замкнутую систему и, стало-быть, въ опредѣленной области измѣненія переменныхъ, допускаютъ существованіе $2n - m + 1$ различныхъ интеграловъ. На основаніи тождествъ (30), мы заключаемъ, что функций

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n+1} \quad (32)$$

представляютъ различные интегралы системы (31), которые, согласно съ предыдущимъ, находятся между собой въ инволюціи.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Чтобы уравненія (21) представляли полное интегральное собраніе С. Ли системы производныхъ уравненій (29) въ инволюціи для этого достаточно, чтобы функции (32) служили интегралами въ инволюціи замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными (31).

Наконецъ, предположимъ, что уравненія (29) представляютъ замкнутую систему и функциональный опредѣлитель

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными первой порядка одной неизвѣстной функцией*, стр. 39.

$$D\left(\frac{F_1}{p_1}, \frac{F_2}{p_2}, \dots, \frac{F_m}{p_m}\right)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ уравненія (29) приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и ихъ полное интегральное собраніе C . Ли представляется совокупностью послѣднихъ уравненій (33) и $n - m + 1$ слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F'_{m+s}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = C_s, \\ s = 1, 2, \dots, n - m + 1, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

которыя получаются изъ $n - m + 1$ послѣднихъ уравненій (21), исключеніемъ изъ нихъ значеній p_1, p_2, \dots, p_m , опредѣляемыхъ совокупностью уравненій (33).

Легко видѣть, что послѣднія значенія функций F_{m+1} представляютъ интегралы слѣдующей яковьевской системы линейныхъ уравненій ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + [H_k, f] = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\}$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются только на переменныя величины

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n.$$

Другими словами уравненія (34) представляютъ интегралы обобщенной канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\begin{aligned} dx_{m+r} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k, \\ dp_{m+r} &= - \sum_{k=1}^m \frac{dH_k}{dx_{m+r}} dx_k, \end{aligned}$$

1) См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 69.

$$dz = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k,$$

$$r = 1, 2, \dots, n-m.$$

Итакъ, изъ изложенныхъ соображеній вытекаетъ, что для опредѣленія полной интегральной собранія *C. Ли* его производныхъ уравненій, достаточно составить удовлетворяющіе указаннымъ условіямъ замкнутости интегралы соответствующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными.

Если данныя производныя уравненія разрешимы относительно перемѣнныхъ p , то уравненія, опредѣляющія, совместно съ данными производными уравненіями, ихъ полное интегральное собраніе, представляютъ интегралы въ инволюціи каноническихъ уравненій, соответствующихъ разрешеннымъ производнымъ уравненіямъ.

Такимъ образомъ устанавливается полная аналогія между классической теоріей дифференціальнахъ уравненій съ частными производными и теоріей производныхъ уравненій *C. Ли*. Въ обоихъ случаяхъ изслѣдуемая полная рѣшенія, какъ тѣхъ такъ и другихъ уравненій, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, представляются замкнутыми системами $n + 1$ уравненій. При этомъ все различіе заключается въ разрешимости послѣднихъ уравненій относительно перемѣнной z и каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Относительно послѣднихъ перемѣнныхъ изслѣдуемая замкнутая система разрешима, для дифференціальнахъ уравненій; что же касается производныхъ уравненій *C. Ли*, то соответствующая замкнутая система не разрешается относительно каноническихъ перемѣнныхъ одного и того же класса. Эти условія разрешимости характеризуются значеніями извѣстнаго функціональнаго опредѣлителя и его миноровъ.

Остановливаясь на подробномъ разсмотрѣніи послѣднихъ опредѣлителей, легко составить болѣе ясное представленіе относительно изслѣдуемыхъ собраній.

Если система (28), совместно съ даннымъ уравненіемъ (27), представляетъ его полный интегралъ q -аго класса, то мы должны имѣть тождество

$$D \begin{pmatrix} F_1, F_2, \dots, F_n \\ z, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} = 0,$$

при чемъ уничтожаются тождественно также и всѣ миноры опредѣлителя. первой части послѣдняго равенства, отъ перваго до q -аго порядка включительно. Предположимъ, что первымъ отличнымъ отъ нуля является слѣдующій функціональный опредѣлитель—миноръ $q + 1$ -аго порядка

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}}\right) \geq 0. \quad (35)$$

Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что всѣ функціи

$$F_{n-q}, F_{n-q+1}, \dots, F_n$$

не зависятъ непосредственно отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, но являются функціями послѣднихъ только черезъ посредство остальныхъ функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}.$$

Слѣдовательно, между разсматриваемыми функціями должны существовать слѣдующія зависимости

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} F_{n-q+i} \\ \Phi_{i+1} \end{matrix}} \right\} \quad (36)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Аналогичное заключеніе распространяется также на уравненія (34), представляющія, совместно съ замкнутой системой производныхъ уравненій (33), ея полное интегральное собраніе С. Ли. Если послѣднее принадлежит q -ому классу, то

$$D\left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n+1}}{z, p_{m+1}, \dots, p_n}\right) = 0$$

и всѣ миноры функціональнаго опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, также уничтожаются тождественно, отъ перваго до q -аго порядка включительно. Предполагая отличнымъ отъ нуля опредѣлитель—миноръ

$$D\left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}}\right) \geq 0, \quad (37)$$

получаемъ зависимости между функціями F_{m+i} слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-q}), \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} F_{n-q+i} \\ \Phi_i \end{matrix}} \right\} \quad (38)$$

$$i = 1, 2, \dots, q+1.$$

Что касается полныхъ интегральныхъ собраній нулевого класса, то опредѣляющія ихъ функціи независимы между собой относительно переменной z и каноническихъ переменныхъ второго класса.

Такимъ образомъ только что отмѣченное существенное различіе между дифференціальными уравненіями съ частными производными и производными уравненіями С. Ли формулируется слѣдующими словами:

Интегралы обыкновенных канонических уравнений, определяющие полные интегралы соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными, независимы между собой относительно переменных x и канонических переменных второго класса; что же касается аналогичных интегралов канонических уравнений, соответствующих производным уравнениям С. Ли, то они связаны между собой зависимостями, число которых равно классу рассматриваемого интегрального собрания, увеличенному на единицу.

Как хорошо известно, из теории дифференциальных уравнений с частными производными, эти уравнения всегда имѣютъ, въ определенной области измѣненія переменныхъ, послѣдніе указанные интегралы ¹⁾. Что касается производныхъ уравнений С. Ли, то вопросъ о существованіи рассматриваемыхъ интеграловъ соответствующихъ каноническихъ уравнений долженъ послужить для насъ предметомъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

5. Мы рассматривали выше происхожденіе производныхъ уравнений С. Ли, въ пространствѣ трехъ измѣреній, изъ семействъ собраний поверхностныхъ элементовъ типовъ M_2^1 , M_2^0 , (см. стр. 20—23).

Получаемыя производныя уравненія вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (39)$$

представляютъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ уравненій соответствующаго полного интегральнаго собрания. Какъ было доказано, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ полныхъ интегральныхъ собраний вида M_2^1 , M_2^0 , внутри определенной области измѣненія переменныхъ, можетъ представляться только, или въ видѣ линейнаго уравненія относительно переменныхъ p и q , или въ видѣ функциональной зависимости между переменными x , y и z . Поэтому въ пространствѣ трехъ измѣреній полные интегралы С. Ли первого и второго классовъ существуютъ только для двухъ родовъ производныхъ уравненій, вида (39), которыя, или линейны относительно переменныхъ p и q , или отъ нихъ не зависятъ. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы пришли бы къ невозможному заключенію, что, въ рассматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ, изъ уравненій упомянутыхъ собраний, представляется также уравненіями, отличными отъ указанныхъ выше линейныхъ и функциональныхъ.

Точно такъ же легко убѣдиться, что производное уравненіе (1) допускаетъ полныя интегральныя собранія С. Ли $n-1$ или n класса, представляемые символами M_n^1 и M_n^0 , только при условіи, что изслѣдуемое уравненіе (1) является, или линейнымъ относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , или

¹⁾ См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73.

представляет функциональную зависимость только между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z .

Действительно, пусть имеем полное интегральное собрание $n-1$ -го класса, представленное следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_{i+1} &= \varphi_i(x_1, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ p_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} p_{i+1}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Согласно съ понятіемъ о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ даннаго уравненія (1), послѣднее должно получаться какъ результатъ исключенія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n изъ послѣднихъ $n+1$ написанныхъ уравненій. При этомъ возможны два слѣдующихъ различныхъ случая, которые находятся въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли, внутри нашей области измѣненія переменныхъ, n первыхъ уравненій нашей системы (40) относительно всѣхъ C , или нѣтъ. Если эти уравненія дають тамъ значенія C_1, C_2, \dots, C_n функциями переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n, z , то подставляя полученныя значенія C въ послѣднее уравненіе (40), находимъ искомый результатъ исключенія, въ видѣ линейнаго уравненія относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n . Если же первыя n уравненій (40) неразрѣшимы относительно всѣхъ C , то очевидно они дають одну зависимость, между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z , которая и представляетъ искомый результатъ исключенія. Стало-быть, въ этомъ случаѣ производное уравненіе C . Ли не зависитъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса.

Наконецъ, пусть уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ C . Ли n -го класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ уравненій

$$\begin{aligned} z &= \varphi(C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_i &= \varphi_i(C_1, C_2, \dots, C_n), \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно результатъ исключенія всѣхъ C изъ послѣднихъ уравненій, представляется зависимостью только между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z .

Слѣдовательно, полные интегралы $n-1$ класса существуютъ только для производнаго уравненія C . Ли, или линейнаго относительно

переменных p_1, p_2, \dots, p_n , или независимо от последних. Полные интегралы n -го класса существуют только для уравнений, не заключающих канонических переменных второго класса.

Предположим, что исследуемое производное уравнение (1) имеет полное интегральное собрание S . Ли q -го класса; преобразовываем данное уравнение (1) к виду (27), и пусть рассматриваемое его решение представляется совокупностью уравнений (27) — (28). Так как последнее принадлежит q -ому классу, то существуют $q + 1$ равенств (36). Поэтому система уравнений (28), в рассматриваемой области изменения наших переменных, замѣняется слѣдующими уравненіями

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_r, \\ r &= 1, 2, \dots, n - q - 1, \\ \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}) &= C_{n-q+i}, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Въ силу неравенства (35), первые $n - q - 1$ уравнений последней системы, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), разрѣшаются относительно переменныхъ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-q}$ и даютъ ихъ значенія въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{aligned} p_k &= \psi'_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-q-1}), \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n - q. \end{aligned}$$

Остальные $q + 1$ уравнений предыдущей системы (41) должны въ такомъ случаѣ, на основаніи послѣднихъ уравнений, приводиться къ слѣдующему виду, какъ это слѣдуетъ изъ условія замкнутости уравнений интегрального собранія,

$$\begin{aligned} z &= \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_{n-q+i} &= \varphi'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Прилагая въ настоящемъ случаѣ разсужденія, которыми мы уже имѣли случай раньше пользоваться (см. стр. 44, 47), приходимъ къ заключенію, что функціи

$$\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \dots, \psi'_{n-q}$$

линейны относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующій выводъ:

Чтобы производное уравненіе (27) имѣло полный интегралъ С. Ли q -аго класса, для этого соответствующая ему обобщенная система каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій должна имѣть $n - q - 1$ интеграловъ, которые, совместно съ даннымъ уравненіемъ, въ определенной области измѣненія нашихъ переменныхъ, приводятся къ системѣ $n - q$ линейныхъ уравненій, относительно каноническихъ переменныхъ второго класса.

Наконецъ, пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій (29). Нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ заключеній:

Если переменныя p_1, p_2, \dots, p_n не исключаются изъ послѣдней системы, то для нея не существуетъ полныхъ интеграловъ С. Ли, классъ которыхъ былъ бы больше числа $n - m$; если для данной системы (29) существуютъ полные интегралы С. Ли класса $n - m + t$, то въ такомъ случаѣ уравненія (29) должны заключать t уравненій, не зависящихъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса. Наконецъ, если система уравненій (29) допускаетъ полный интегралъ С. Ли $n - m$ -аго класса, то рассматриваемая система должна, или состоять изъ линейныхъ уравненій, или заключать, по меньшей мѣрѣ, одно уравненіе, не зависящее отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, при чемъ остальные уравненія, въ такомъ случаѣ, могутъ быть какими угодно. Всѣ эти заключенія непосредственно вытекаютъ изъ рассмотрѣнія общаго вида полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, изъ которыхъ производныя уравненія получаются путемъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Разсмотримъ въ заключеніе общій случай, когда данная замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли выражается въ видѣ (33)-емъ и имѣетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса, представленный совокупностью уравненій (33) и (34). Принимая во вниманіе условія (37) и (38), которыя при этомъ должны имѣть мѣсто, мы приходимъ путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, къ слѣдующему заключенію:

Чтобы замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли (33) имѣла полный интегралъ q -аго класса, для этого соответствующая обобщенная система каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ должна имѣть $n - m - q$ интеграловъ, которые, совместно съ уравненіями данной системы, въ определенной области измѣненія нашихъ переменныхъ, приводятся къ системѣ $n - q$ линейныхъ уравненій относительно каноническихъ переменныхъ второго класса.

Всѣ рассмотрѣнные случаи отмѣчаютъ частный видъ, который должны представлять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы допускать полные интегралы С. Ли того или другого класса. Последнее

обстоятельство является весьма характернымъ для производныхъ уравненій С. Ли, значительно отличающимъ послѣднія уравненія отъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которыя всѣ безъ исключенія, внутри опредѣленной области измѣненія переменныхъ, имѣютъ полныя интегралы Лагранжа.

6. Выведенное заключеніе, относительно частнаго характера производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полныя интегралы, отличные отъ нулевого класса, является весьма существеннымъ для установленія правильной точки зрѣнія на рассматриваемую теорію С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, въ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій установилось воззрѣніе, считающее полныя интегралы С. Ли обобщеніемъ интеграловъ классической теоріи. Выше мы указывали уже (см. стр. 34—36) на существенную разницу между уравненіями дифференціальными и производными С. Ли. Теперь, при болѣе близкомъ разсмотрѣніи вопроса, когда, отъ общихъ геометрическихъ соображеній о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, мы переходимъ къ постановкѣ аналитической задачи о разысканіи интеграловъ С. Ли, тогда оказывается, что видъ производныхъ уравненій, допускающихъ существованіе послѣднихъ интеграловъ, ограниченъ болѣе узкими условіями, чѣмъ видъ дифференціальныхъ уравненій классической теоріи. Последнее обстоятельство заслуживаетъ того, чтобы на немъ остановиться подробнѣе тѣмъ болѣе, что связанныя съ нимъ вопросы очень мало затронуты въ литературѣ изслѣдуемой теоріи.

Свои новыя понятія о производныхъ уравненіяхъ и ихъ полныхъ рѣшеніяхъ, основанныя на геометрической теоріи поверхностныхъ элементовъ, С. Ли далъ впервые въ 1872 году ¹⁾. Послѣ этого тѣ же самыя понятія были приведены Ф. Клейномъ въ его извѣстной *Ерманенской Программѣ* ²⁾ и легли затѣмъ въ основаніе мемуара С. Ли: Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, въ IX томѣ Mathematische Annalen, откуда и перешли въ большую часть трактатовъ, относительно рассматриваемыхъ уравненій. Слѣдуетъ однако замѣтить, что, ни С. Ли, ни другіе авторы не занимались подробнымъ изученіемъ идеи новыхъ введенныхъ понятій ³⁾. Лишь только отчасти связанные съ ними вопросы были затронуты Беклундомъ ⁴⁾, относительно про-

¹⁾ Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität Göttingen, S. 473.

²⁾ F. Klein. — Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1891, p. 187).

³⁾ F. Engel. — Zur Erinnerung an Sophus Lie (Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Allgemeiner Theil 1899, S. XXXI).

⁴⁾ Mathematische Annalen, Bd. 17, S. 285.

изводныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, и С. Ли ¹⁾ въ одномъ изъ послѣднихъ своихъ мемуаровъ. Въ своемъ сообщеніи ²⁾ Парижской Академіи Наукъ: *Sur les intégrales de S. Lie*, мы указали рядъ критическихъ соображеній относительно теоріи С. Ли.

Факты, которые вызываютъ необходимость критическаго разсмотрѣнія выведенныхъ С. Ли понятій, достаточно выяснены выше, и наша задача приводится къ тому, чтобы установить соотвѣтствіе между точкой зрѣнія относительно общности рѣшеній С. Ли, высказываемой нѣкоторыми авторами, и частнымъ характеромъ тѣхъ условій, которымъ должны удовлетворять разсматриваемыя уравненія, чтобы допускать полные интегралы С. Ли.

Легко убѣдиться, что если интегральныя собранія С. Ли и являются обобщеніемъ интеграловъ Лагранжа дифференціальныхъ уравненій, то только съ чисто формальной стороны.

Возьмемъ, напримѣръ, формулы (3) и (4), опредѣляющія полный интегралъ С. Ли q -аго класса производнаго уравненія (1)-аго. Полагая въ этихъ формулахъ q равнымъ нулю, мы получаемъ формулы (5), которые представляютъ полный интегралъ Лагранжа уравненія (1), разсматриваемаго какъ дифференціальное, и заключаются такимъ образомъ какъ частный случай въ общихъ формулахъ (3) и (4). Но, удовлетворяясь послѣднимъ толкованіемъ, мы становимся на формальную точку зрѣнія и только ограничиваемся разсмотрѣніемъ внѣшняго вида формулъ, не останавливаясь на значеніи разрѣшаемыхъ ими задачъ.

Между тѣмъ способы образованія производныхъ уравненій С. Ли и свойства ихъ интегральныхъ собраній показываютъ, что необходимо разсматривать эти уравненія какъ совершенно различныя, въ зависимости отъ класса геометрическаго мѣста собранія поверхностныхъ элементовъ, изъ которыхъ происходятъ разсматриваемыя производныя уравненія. Это различіе между производными уравненіями различныхъ классовъ особенно наглядно обнаруживается при сравненіи собраній нулевого класса съ собраніями другихъ классовъ, порядокъ которыхъ отличенъ отъ нуля, т. е. при сравненіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными классической теоріи съ производными уравненіями С. Ли. Какъ раньше мы уже отмѣчали (см. стр. 34), каноническія перемѣнныя перваго класса разсматриваются, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ независимыя перемѣнныя. Наоборотъ теорія С. Ли исходитъ изъ предположеній, что послѣднія перемѣнныя связаны между собой нѣкоторымъ числомъ q уравненій. Предполагая послѣднее число q равнымъ ну-

¹⁾ *S. Lie*.—Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen (Leipzig. Berichte. Jahrg. 1898. S. 113—180).

²⁾ Comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 3 août 1903.

лю, мы получаемъ формулы классической теоріи и можемъ считать поэтому, съ формальной точки зрѣнія, что дифференціальныя уравненія и ихъ интегралы Лагранжа представляютъ частный случай производныхъ уравненій и полныхъ интеграловъ С. Ли.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ разсмотрѣнія однихъ только опредѣленій и понятій. Поэтому было бы слишкомъ поспѣшно, прежде чѣмъ сравнить вопросы и задачи, которые разсматриваются въ обоихъ теоріяхъ, заключать предварительно, что и вся теорія С. Ли представляетъ обобщеніе классической. Достаточно для этого возвратиться къ отмѣченнымъ выше случаямъ существованія полныхъ интеграловъ различныхъ классовъ.

Остановимся, напримѣръ, на пространствѣ трехъ измѣреній, гдѣ существуетъ шесть различныхъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ, представляемыхъ слѣдующими символами

$$M_2^3, M_2^1, M_2^0,$$

$$M_1^1, M_1^0,$$

$$M_0^0.$$

Всѣ эти собранія представляютъ настолько различные геометрическіе образы, что трудно ожидать *a priori*, чтобы каждая система ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

могла быть собрана въ любое изъ этихъ шести собраній. И дѣйствительно, какъ мы видѣли выше, для существованія каждого изъ указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, написанное производное уравненіе должно удовлетворять своимъ особннымъ частнымъ условіямъ.

Послѣднее обстоятельство, съ научной, философской точки зрѣнія, находится въ полномъ соотвѣтствіи съ мыслями, которыя высказалъ С. Ли, относительно представленія геометрическихъ формъ пространства, въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ: *Ueber Complexe insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* ¹⁾. Указывая, что возможно принимать за основные элементы различные геометрическіе образы, какъ точка, согласно съ Декартомъ, или прямая, вмѣстѣ съ Плюкеромъ, С. Ли прибавляетъ: *Da aber hierdurch ein Geraden-System—ein Plücker'scher Linien-Complex—ausgezeichnet*

¹⁾ Mathematische Annalen. Bd. 5, S. 115.

wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien—Complexes beschäftigt, so kann es sehr vorthellhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen ¹⁾.

Совершенно аналогичныя соображенія примѣняются къ области перемѣнныхъ величинъ, представляемой системой поверхностныхъ элементовъ, которая опредѣляется однимъ даннымъ или системой данныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Какъ вытекаетъ изъ предыдущаго изложенія, въ зависимости отъ характера данной системы поверхностныхъ элементовъ, послѣдніе могутъ быть собраны въ полныя интегральныя собранія С. Ли одного или другого опредѣленнаго класса.

Такимъ образомъ, указанныя выше условія существованія интегральныхъ собраній С. Ли представляютъ достаточное основаніе, чтобы утверждать, что *разсматриваемые интегралы, внутри известной, определенной области измѣненія переменныхъ, существуютъ въ исключительныхъ случаяхъ только для производныхъ уравненій С. Ли, особаго частнаго вида.*

Здѣсь однако необходимо сдѣлать нѣсколько замѣчаній относительно изслѣдованій С. Ли, къ которымъ мы возвратимся подробнѣе въ дальнѣйшемъ изложеніи. Какъ въ своемъ доказательствѣ существованія полныхъ интегральныхъ собраній ²⁾, такъ и во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ, по интегрированію производныхъ уравненій, С. Ли все время остается на чисто формальной точкѣ зрѣнія, ограничиваясь разсмотрѣніемъ общихъ формулъ. При этомъ С. Ли не дѣлаетъ различія между интегралами различныхъ классовъ и не даетъ способовъ разысканія полныхъ интеграловъ одного даннаго опредѣленнаго класса. Такая постановка изслѣдованія не можетъ удовлетворять читателя, оставляя не выясненнымъ вопросъ о взаимномъ отношеніи теорій дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли.

Мы указали уже въ первой главѣ настоящаго изслѣдованія (см. н^о 8) существенное различіе въ опредѣленіи дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли; кромѣ того, на предыдущихъ страницахъ, отмѣчено также различіе между тѣми и другими уравненіями, относительно существованія ихъ рѣшеній, и указано, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для уравненій исключительнаго вида.

Въ виду послѣднихъ изложенныхъ соображеній, являются вопросы, относительно условій, при которыхъ существуютъ интегралы С. Ли, отно-

¹⁾ Loc. cit. S. 150.

²⁾ Mathematische Annalen, Bd. 9, S. 261.

сительно разысканія производныхъ уравненій, допускающихъ интегралы С. Ли опредѣленнаго класса, и, наконецъ, относительно того значенія, которое представляютъ производныя уравненія С. Ли и ихъ интегральныя собранія.

Кромѣ общаго научнаго интереса, который представляетъ всякая математическая теорія, значеніе интеграловъ С. Ли, для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, выясняется въ достаточной мѣрѣ изъ ихъ разсмотрѣннаго свойства, представлять систему интеграловъ въ инволюціи каноническихъ уравненій, соответствующихъ даннымъ производнымъ уравненіямъ. Этимъ послѣднимъ свойствомъ интеграловъ С. Ли намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи, при интегрированіи изслѣдуемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Что же касается условій существованія интеграловъ С. Ли и вычисленія производныхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы различныхъ классовъ, то, для рѣшенія возникающихъ при этомъ вопросовъ, намъ придется интегрировать нѣкоторыя системы уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ функцій. Съ изученія этихъ послѣднихъ уравненій мы и имѣемъ въ виду начать наши дальнѣйшія изслѣдованія.

Г Л А В А III.

Объ интегрированіи нѣкоторыхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій.

1. Уравненія, которыя служатъ предметомъ изслѣдованія настоящей главы, представляютъ обобщеніе уравненій, проинтегрированныхъ Якоби въ его мемуарѣ: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* ¹⁾ и къ которымъ приводятся многіе вопросы анализа. Теорія интегрированія изслѣдуемыхъ уравненій была опубликована мною на страницахъ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ въ мемуарѣ: *Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* ²⁾.

Интегрируя на послѣдующихъ страницахъ наши обобщенныя уравненія, мнѣ придется вмѣстѣ съ тѣмъ подвергнуть и интегралы упомянутыхъ уравненій Якоби болѣе подробному изученію, чѣмъ это дѣлалъ знаменитый геометръ въ своихъ изслѣдованіяхъ.

Обозначимъ черезъ z_1, z_2, \dots, z_n неизвѣстныя функціи $m+p$ независимыхъ переменныхъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_{m+p} .

Уравненія, которыя мы имѣемъ въ виду интегрировать, представляются слѣдующимъ образомъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при чемъ коэффициенты X_k^h, X^{hr} представляютъ функціи всѣхъ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, и значекъ p имѣть нѣкоторое цѣлое численное значеніе.

Въ частномъ случаѣ, когда значекъ p тождественно равенъ нулю, то всѣ коэффициенты X_k^h исчезаютъ, и изслѣдуемая система приводится къ извѣстной системѣ уравненій

¹⁾ Jacobi.—Gesammelte Werke, Band IV, S. 7.

²⁾ Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5-e série, p. 423.

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} = X^{hr},$$

$$h = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

соотвѣствующихъ уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ, при чемъ функціи X^{hr} должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ точности дифференціаловъ.

Если значекъ n равенъ 1, то рассматриваемыя уравненія представляютъ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Наконецъ, если показатель m равенъ 1, то наши уравненія принимаютъ видъ упомянутой выше системы уравненій Якоби ¹⁾, обобщеніе которой представляетъ предметъ настоящей главы нашего изслѣдованія. Въ этомъ случаѣ число уравненій n равно числу неизвѣстныхъ функцій и, стало-быть, соотвѣствующія уравненія Якоби допускаютъ всегда, въ извѣстной области измѣненія переменныхъ, существованіе интеграловъ, какъ это слѣдуетъ, на основаніи изслѣдованій Коши и Ковалевской.

Если показатель m больше 1, т. е. число уравненій превышаетъ число заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ функцій, то, какъ извѣстно, существованіе интеграловъ послѣднихъ уравненій требуетъ выполненія нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, формальнаго характера. Объ этихъ послѣднихъ легко судить по частнымъ случаямъ, отмѣченнымъ выше, когда $p = 0$ или когда $n = 1$. Въ первомъ случаѣ, для существованія интеграловъ рассматриваемыхъ уравненій, должны удовлетворяться условія точности дифференціаловъ; во-второмъ же случаѣ изслѣдуемая система уравненій должна быть якобіевской, т. е. должны уничтожаться тождественно составленныя извѣстнымъ образомъ скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей рассматриваемыхъ уравненій.

Ниже мы составимъ, въ самомъ общемъ видѣ, условія, которымъ должны удовлетворять изслѣдуемыя уравненія (1), для того чтобы допустить существованіе интеграловъ. Эти условія явятся слѣдствіемъ зависимости между уравненіями (1) и нѣкоторой якобіевской системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по всѣмъ переменнымъ величинамъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, рассматриваемымъ какъ независимыя переменныя.

2. Предположимъ, что слѣдующая система n различныхъ уравненій

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ Въ Journal Crelle (Bd. 100, S. 404, Bd. 110, S. 171) Гамбургеръ два раза возвращался, въ своихъ изслѣдованіяхъ, къ этимъ уравненіямъ.

разрѣшимыхъ относительно переменныхъ величинъ z_1, z_2, \dots, z_n , представляетъ рѣшеніе изслѣдуемой системы дифференціальныхъ уравненій (1). Дифференцируя уравненія (2) по всѣмъ независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n , получаемъ рядъ слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial x_h} &= 0, \\ h &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial x_k} &= 0, \\ k &= m+1, m+2, \dots, m+p, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

при чемъ значекъ i принимаетъ всѣ различныя значенія, отъ 1 до n .

Умножаемъ равенства (4) соответственно на X_k^h и сумму ихъ складываемъ съ уравненіемъ (3), соответствующимъ значку h . Такимъ образомъ мы получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_r} &= 0, \\ h &= 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Такъ какъ уравненія (2) даютъ рѣшенія данной системы (1), то для опредѣляемыхъ равенствами (2) значеній функций z_1, z_2, \dots, z_n имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} = X^{hr},$$

$h = 1, 2, \dots, m, \quad r = 1, 2, \dots, n.$

Подставляя, въ предыдущія равенства (5), правыя части послѣднихъ написанныхъ равенствъ, вмѣсто ихъ лѣвыхъ частей, получаемъ слѣдующія новыя равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r} &= 0, \\ h &= 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію: чтобы опредѣляемыя уравненіями (2) функции z_1, z_2, \dots, z_n удовлетворяли данной системѣ (1), для этого равенства (6) необходимо должны быть слѣдствіемъ уравненій (2). Такъ какъ лѣвыя части полученныхъ равенствъ (6) представляютъ функции всѣхъ переменныхъ x и z , то мы говоримъ, что, въ общемъ случаѣ, равенства (6) должны уничтожаться на основаніи уравненій (2). Въ частности равенства (6) могутъ также уничтожаться тождественно, были бы только для этого подобраны соответствующимъ образомъ функции

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Наконецъ, равенства (6) должны представлять тождества еще и въ томъ случаѣ, когда въ правыхъ частяхъ уравненій (2), вмѣсто нулей, поставить соответственно произвольныя постоянныя величины C_1, C_2, \dots, C_n .

3. Благодаря выведеннымъ равенствамъ (6), устанавливается зависимость между изслѣдуемой системой дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функций z_1, z_2, \dots, z_n (1) и системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функции f по всѣмъ переменнымъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя переменныя.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f}{\partial z_r} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что послѣдняя система уравненій (7) интегрируема и имѣетъ n интеграловъ f_1, f_2, \dots, f_n , различныхъ относительно переменныхъ z_1, z_2, \dots, z_n , такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{f_1, f_2, \dots, f_n}{z_1, z_2, \dots, z_n} \right) \neq 0. \quad (8)$$

Легко доказать въ такомъ случаѣ, что слѣдующія уравненія

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

опредѣляютъ рѣшеніе системы данныхъ уравненій (1).

Дѣйствительно, поступая съ уравненіями (9) совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали это въ началѣ предыдущаго n^o 2-го съ уравненіями (2), мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ различныхъ значений показателя h , отъ 1 до m .

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, функціи f_i представляютъ интегралы системы уравненій (7), то, стало-быть, имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ значений h , отъ 1 до m .

Поэтому, на основаніи послѣднихъ равенствъ, предыдущія становятся

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} \right) = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ значений h , отъ 1 до m . Въ виду неравенства (8), система n послѣднихъ тождествъ приводитъ къ n слѣдующимъ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$r = 1, 2, \dots, n,$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значений показателя h , отъ 1 до n , и доказываютъ такимъ образомъ справедливость нашего предложенія.

4. Итакъ, чтобы изслѣдуемая система уравненій (1) имѣла рѣшенія, для этого достаточно, чтобы уравненія (7) имѣли n различныхъ интеграловъ. Поэтому условія, которымъ для этого должна удовлетворять послѣдняя система (7), представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ условія интегрируемости данныхъ уравненій (1).

Предположимъ, что коэффициенты послѣднихъ уравненій X_k^h, X^{hr} таковы, что m уравненій (7) образуютъ *якобиевскую* систему, обладающую $p + n$ различными рѣшеніями.

Соотвѣтствующая система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ имѣетъ слѣдующій видъ.

$$dx_k = \sum_{h=1}^m X_k^h dx_h,$$

$$k = m+1, m+2, \dots, m+p,$$

$$dz_r = \sum_{h=1}^m X^{hr} dx_h,$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ системой уравненій (1) Якоби, т. е. при $m=1$, тогда послѣдняя система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ обращается въ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая можетъ быть представлена также въ слѣдующемъ видѣ. какъ изображаетъ ее Якоби,

$$dx_k = \frac{dx_k}{X_k} = \frac{dz_r}{X^r},$$

$$k = 2, 3, \dots, p+1, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

при чемъ второй значекъ коэффициентовъ X^r мы опускаемъ, какъ излишній.

Пусть функціи

$$f_1, f_2, \dots, f_{p+n}$$

представляютъ систему $p+n$ различныхъ интеграловъ уравненій (7). Такъ какъ произвольная функція послѣднихъ интеграловъ представляетъ также рѣшеніе системы (7), то, на основаніи теоремы, доказанной въ предыдущемъ н^о 3-емъ, слѣдующія формулы

$$\Pi_r (f_1, f_2, \dots, f_{p+n}) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (10)$$

представляютъ рѣшеніе данныхъ уравненій (1), при чемъ $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Легко доказать, что уравненія (10) представляютъ *общій интегралъ* системы (1), т. е. всякое рѣшеніе послѣднихъ уравненій

$$z_r = \psi_r (x_1, x_2, \dots, x_{m+p}), \quad \left. \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (11)$$

заключается въ формулахъ (10), при условіи, что всѣ значенія переменныхъ x и z , удовлетворяющія зависимостямъ (11), находятся внутри

области измѣненія переменныхъ величинъ. для которой яковѣевская система (7) интегрируема ¹⁾).

Въ самомъ дѣлѣ, для каждаго значенія показателя h , мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k} - X^{hr} &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, p+n. \end{aligned}$$

Подставляя въ нихъ значенія функций z_1, z_2, \dots, z_n , опредѣляемыя уравненіями (11)-ыми и исключая изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ значенія n величинъ X^{hr} , соответствующихъ показателямъ $r=1, 2, \dots, n$, находимъ новыя тождества

$$\left. \begin{aligned} Dx_h f_s + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h Dx_k f_s &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, p+n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

гдѣ введены слѣдующія условныя обозначенія

$$Dx_i f_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial z_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}.$$

Изъ полученныхъ равенствъ (12) исключаемъ p величинъ X_k^h , соответствующихъ различнымъ значеніямъ $k=m+1, m+2, \dots, m+p$. Такъ какъ число всѣхъ уравненій равно $p+n$, то въ результатѣ исключенія мы получаемъ n новыхъ тождествъ, независящихъ отъ величинъ X_k^h , которыя мы представляемъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{aligned} \Delta_{h\sigma} &= 0, \\ \sigma &= p+1, p+2, \dots, p+n. \end{aligned}$$

Введенное здѣсь выраженіе

$$\Delta_{h\sigma}$$

¹⁾ Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій*.... Стр. 26.

обозначает функциональный определитель, составленный из функций

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_\sigma,$$

относительно переменных величин

$$x_h, x_{m+1}, \dots, x_{m+p},$$

при чем переменные величины z_1, z_2, \dots, z_n рассматриваются как функции (11) всех переменных x_1, x_2, \dots, x_{m+p} , так что мы имеем

$$\Delta_{h\sigma} \equiv \begin{vmatrix} Dx_h f_1 & Dx_{m+1} f_1 & \dots & Dx_{m+p} f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Dx_h f_p & Dx_{m+1} f_p & \dots & Dx_{m+p} f_p \\ Dx_h f_\sigma & Dx_{m+1} f_\sigma & \dots & Dx_{m+p} f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Тождества

$$A_{h\sigma} = 0,$$

$$h = 1, 2, \dots, m,$$

показывают, что рассматриваемые значения функций

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_\sigma$$

связаны между собой одной зависимостью.

Давая значку σ все n значений от $p+1$ до $p+n$, мы заключаем, на основании последних тождеств, что, подставляя решение (11) данных уравнений (1) в функции

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+n},$$

получаем их значения, которые оказываются связанными n различными зависимостями.

Отсюда и следует искомое заключение, что уравнения (10) представляют общий интеграл данной системы дифференциальных уравнений (1).

Приведенное доказательство представляет обобщение известных доказательств, данных для случаев одного линейного уравнения с частными производными первого порядка одной неизвестной функции и для якобиевских систем последних уравнений ¹⁾.

¹⁾ Ср. мое исследование: *Об интегрировании уравнений*.... гл. II, стр. 11 и слѣд. и статью: *Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3 série, t. XVIII).

Само собою разумѣется, что рассматриваемое доказательство ограничивается только указанной областью интегрируемости рассматриваемыхъ уравненій. Если послѣднюю область мы ограничимъ, напримѣръ, условіями однозначности коэффиціентовъ X^h , X^{hr} и существованія ихъ конечныхъ и непрерывныхъ первыхъ частныхъ производныхъ по входящимъ въ нихъ переменнымъ величинамъ, то рѣшенія уравненій (1), не удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ, не могутъ заключаться въ указанномъ общемъ интегралѣ изслѣдуемыхъ уравненій, который принадлежитъ рассматриваемой области интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣть мѣсто послѣдній случай, то нѣкоторые изъ рассматриваемыхъ функціональных опредѣлителей

$$A_{hg}$$

могутъ принимать неопредѣленные или бесконечно большія значенія, и наше доказательство не приводитъ болѣе къ желаемому результату.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую систему уравненій съ частными производными двухъ функцій z_1 и z_2 по независимымъ переменнымъ x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= 1 + \sqrt{z_1 - x}, & \frac{\partial z_1}{\partial y} &= (z_2 - xy) \sqrt{z_1 - x}, \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= y, & \frac{\partial z_2}{\partial y} &= x + (z_2 - xy) (x - 2\sqrt{z_1 - x}). \end{aligned}$$

Внутри области однозначности коэффиціентовъ данныхъ уравненій, ихъ общій интегралъ, согласно съ изложенной теоріей, имѣетъ слѣдующее значеніе

$$\begin{aligned} z_1 &= x + \left[\frac{1}{2} x - C_1 \tan(C_1 y + C_2) \right]^2, \\ z_2 &= xy - 2 C_1^2 \sec^2(C_1 y + C_2), \end{aligned}$$

гдѣ C_1 и C_2 обозначаютъ двѣ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Рассматриваемыя уравненія имѣютъ очевидно также слѣдующее рѣшеніе

$$z_1 = x, \quad z_2 = xy,$$

которое однако, какъ легко видѣть, не заключается въ предыдущихъ формулахъ и не можетъ быть изъ нихъ получено, такъ какъ для опредѣляемыхъ послѣднимъ рѣшеніемъ значеній переменныхъ z_1 , z_2 , x , y коэффиціенты данныхъ уравненій перестаютъ быть однозначными.

Г Л А В А IV.

Разысканіе производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы С. Ли данного класса.

1. Исходя изъ разсмотрѣнія свойствъ полныхъ интегральныхъ собраний С. Ли, мы имѣли уже случай отмѣтить, во второй главѣ нашего изслѣдованія, нѣсколько общихъ условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы существовали для нихъ разсматриваемые интегралы данного опредѣленнаго класса. Наши дальнѣйшія вычисленія будутъ основываться на доказанномъ выше, въ $n^0 4$ -омъ второй главы, свойствѣ разсматриваемыхъ интегральныхъ собраний, представлять интегралы въ инволюціи канонической системы, которые связаны между собой указанными выше зависимостями.

Начнемъ съ изслѣдованія простѣйшаго случая, представляемаго однимъ производнымъ уравненіемъ, не заключающимъ перемѣнной z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Какъ было доказано, въ $n^0 2$ -мъ второй главы, полный интеграль С. Ли послѣдняго уравненія опредѣляется при помощи квадратуры, послѣ того какъ извѣстны $n-1$ уравненій нашего интегральнаго собранія, независящихъ отъ перемѣнной z . Поэтому, возвращаясь къ первымъ $n-1$ уравненіямъ (26) второй главы, легко видѣть, совершенно аналогично разсмотрѣнному общему случаю, когда исходное производное уравненіе заключаетъ перемѣнную z , что функціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$$

должны удовлетворять слѣдующимъ q зависимостямъ

$$\left. \begin{aligned} F_{n-q+i} &\equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \\ i &= 0, 1, 2, \dots, q-1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

для того, чтобы упомянутыя уравненія (26) опредѣляли полный интеграль С. Ли q -аго класса данного уравненія (1).

Для выясненія сущности дальнѣйшихъ вычисленій, займемся прежде всего простѣйшимъ случаемъ существованія полныхъ интеграловъ С. Ли $n-1$ класса, который былъ изслѣдованъ выше, въ 105-омъ второй главы, исходя изъ основныхъ понятій о происхожденіи производныхъ уравненій С. Ли.

Если данное уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ С. Ли $n-1$ -аго класса, то очевидно, что всѣ функции F_s зависятъ только отъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , и равенства (2) должны выражаться слѣдующимъ образомъ

$$F_s \equiv \Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Такъ какъ послѣднія функции не заключаютъ каноническихъ переменныхъ второго класса, то всѣ функции Φ_s находятся въ инволюціи. Наконецъ, соответствующее разсматриваемому уравненію (1) линейное уравненіе съ частными производными, которому удовлетворяютъ функции Φ_s , становится

$$(p_1 + H, \Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0. \quad (3)$$

Искомые интегралы послѣдняго уравненія

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1} \quad (4)$$

не должны зависетьъ отъ переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n . Поэтому имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s \partial p_k} = 0,$$

для всѣхъ значеній указателей s и k , отъ 1 до n . Слѣдовательно, производныя, взятая по переменнымъ p_k отъ предыдущихъ уравненій (3), должны также уничтожаться тождественно.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующія новыя уравненія, которымъ должны удовлетворять искомые функции (4),

$$\sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ k = 2, 3, \dots, n.$$

Такъ какъ число всѣхъ различныхъ требуемыхъ интеграловъ уравненія (3) равно $n-1$, то полученные послѣднія $n-1$ уравненій должны уни-

чтожаться тождественно, каждое въ отдѣльности, т. е. имѣють мѣсто слѣдующія равенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} = 0, \quad (5)$$

для всѣхъ значеній s и k , отъ 2 до n . Интегрируя эти послѣднія равенства, мы получаемъ слѣдующія зависимости

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} = X_i, \\ i = 1, 2, \dots, n-1,$$

гдѣ всѣ X_i представляютъ произвольныя функціи переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Интегрируя вновь полученные равенства еще одинъ разъ, получаемъ искомое значеніе функціи H

$$H = \sum_{i=1}^n X_i p_{i+1} + X,$$

при чемъ X обозначаетъ новую произвольную функцію. Такимъ образомъ, мы получаемъ прежній результатъ: чтобы данное уравненіе (1) допускало полное рѣшеніе S . Ли $n-1$ -аго класса, оно должно приводиться къ линейному уравненію относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n слѣдующаго вида

$$p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \dots + X_{n-1} p_n + X = 0,$$

идѣ коэффициенты $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X$ являются функціями переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n .

То же самое предложеніе имѣетъ мѣсто и для производныхъ уравненій S . Ли, заключающихъ переменную величину z . Въ этомъ послѣднемъ случаѣ однако всѣ искомыя функціи, число которыхъ теперь становится равнымъ n ,

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \quad (6)$$

зависятъ также отъ переменной z и опредѣляются слѣдующимъ уравненіемъ (см. н^о 4, глава II)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} - \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Такъ какъ функціи Φ_s не должны зависетьъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, то искомые интегралы (6) послѣдняго уравне-

нія удовлетворяютъ также уравненіямъ, которыя получаются дифференцированиемъ послѣдняго по всѣмъ переменнымъ $p_2, p_3, \dots p_n$. Получаемыя такимъ образомъ уравненія, послѣ приведенія, принимаютъ слѣдующій видъ

$$\sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} p_s \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$k = 2, 3, \dots n.$

Отсюда, при помощи разсужденій аналогичныхъ предыдущимъ, получаются тѣ же уравненія (5). Поэтому мы приходимъ къ прежнему заключенію, что производное уравненіе C . Ли въ пространствѣ $n-1$ измѣреній, допускающее полныя интегралы C . Ли $n-1$ -аго класса, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ переменныхъ второго класса, при чемъ коэффиціенты этого уравненія зависятъ отъ каноническихъ переменныхъ перваго класса и переменной z .

2. Наши дальнѣйшія изслѣдованія начнемъ съ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаевъ. Пусть имѣемъ производное уравненіе C . Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, независящее отъ переменной z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = 0. \quad (7)$$

Такъ какъ данное уравненіе представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно переменной p_1 , т. е. заключаетъ каноническія переменныя второго класса, то, согласно съ предыдущимъ (см. $n^o 5$, глава II), рассматриваемое уравненіе (7) не имѣетъ полнаго интеграла C . Ли третьяго класса. Чтобы имѣть полныя интегралы C . Ли второго класса, рассматриваемое уравненіе, на основаніи только что доказаннаго предложенія, должно быть линейнымъ относительно переменныхъ величинъ p_1, p_2, p_3 .

Остается, наконецъ, изслѣдовать третій возможный случай, когда существуетъ полный интеграль C . Ли перваго класса даннаго уравненія (7).

Составляемъ соотвѣтствующее ему линейное уравненіе

$$(p_1 + H, F) = 0.$$

Чтобы существовалъ искомый интеграль уравненія (7), послѣднее линейное уравненіе должно имѣть два интеграла F_1 и F_2 такихъ, чтобы совокупность уравненій (7)-ого и двухъ слѣдующихъ

$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_2.$$

опредѣляла полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (7), гдѣ C_1 и C_2 —двѣ произвольныя постоянныя. Для этого должны существовать слѣдующія равенства

$$(p_1 + H, F_1) = 0, \quad (8)$$

$$(p_1 + H, F_2) = 0, (F_1, F_2) = 0, \quad (9)$$

и кромѣ того функція F_2 должна быть связана съ функціей F_1 зависимостью

$$F_2 = \Phi (x_1, x_2, x_3, F_1).$$

Оба уравненія (9) преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ. Предполагая

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \neq 0,$$

принимая F_1 за новую переменную вмѣсто p_2 . Такъ какъ, въ силу предыдущей зависимости между F_2 и F_1 , функція F_2 выражается въ новыхъ переменныхъ только черезъ величины x_1, x_2, x_3 и F_1 , то формулы преобразованія уравненій (9) къ новымъ переменнымъ становятся

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

$$s = 2, 3.$$

Поэтому преобразованныя уравненія (9), въ силу уравненія (8), принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^3 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^3 Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

при чемъ коэффициенты X_s, Y_s представляютъ функціи переменныхъ x_1, x_2, x_3, F_1 и p_3 , которыя получаются соответственно изъ выражений производныхъ

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

замѣной въ нихъ значенія прежней переменнѣй p_2 черезъ новую переменнѣй F_1 .

Такъ какъ искомое значеніе функціи Φ не зависитъ отъ переменнѣй p_3 , то очевидно функція Φ должна удовлетворять также слѣдующимъ уравненіямъ, которыя получаются изъ уравненій (10) дифференцированіемъ ихъ по переменнѣй p_3 ,

$$\sum_{s=2}^3 \frac{\partial X_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^3 \frac{\partial Y_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Въ виду того, что система (10) допускаетъ всего одинъ только интегралъ, отличный отъ F_1 , то послѣднія два уравненія должны представлять слѣдствія уравненій (10). Поэтому имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial p_3} = \frac{\partial X_3}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial p_3} = \frac{\partial Y_3}{\partial p_3}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Послѣднее изъ этихъ двухъ равенствъ (11) даетъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial p_3} \lg \frac{Y_2}{Y_3} = 0,$$

интегрированіе котораго показываетъ, что отношеніе $\frac{Y_2}{Y_3}$ представляетъ произвольную функцію переменныхъ величинъ x_1, x_2, x_3 и F_1 , независимую отъ переменнѣй p_3 . Такимъ образомъ получается зависимость

$$Y_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) Y_3, \quad (12)$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Поэтому, на основаніи послѣдняго равенства (12), первое уравненіе (11) приводится къ слѣдующему виду

$$Y_3 \left(\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} \right) = 0.$$

Если предположить, что первый множитель послѣдняго равенства обращается въ нуль, тогда, въ силу уравненія (12), получаемъ

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0.$$

Послѣднія равенства приводятъ къ заключенію, что функція F_1 , внутри нашей области измѣненія переменныхъ, не зависитъ отъ переменныхъ p_2 и p_3 , что противно введенному выше условію $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \not\equiv 0$.

Отбрасывая поэтому сдѣланное предположеніе, приравниваемъ нулю второй множитель рассматриваемаго равенства и получаемъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} = 0,$$

которое приводится къ виду

$$\frac{\partial}{\partial p_3} (X_2 - \varphi X_3) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ представляетъ произвольную функцію переменныхъ x_1, x_2, x_3 и F_1 , т. е.

$$X_2 - \varphi X_3 = \psi (x_1, x_2, x_3, F_1), \quad (13)$$

при чемъ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ.

Въ силу неравенства $Y_3 \not\equiv 0$, разрѣшая уравненія (10) относительно производныхъ $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ и принимая во вниманіе равенства (12)—(13), приводимъ уравненія (10) къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi (x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi (x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Такъ какъ послѣдняя система уравненій должна быть нормальной, то отсюда слѣдуетъ, что функціи ψ и φ удовлетворяютъ условію

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (15)$$

Возвращаясь въ уравненіяхъ (12) и (13) къ прежнимъ переменнымъ, т. е. совершая обратную замѣну переменной F_1 черезъ p_2 , мы должны разсматривать въ послѣднихъ уравненіяхъ величину F_1 какъ функцію переменныхъ x_1, x_2, x_3, p_2, p_3 ; подставляя, наконецъ, значенія выраженій X_s, Y_s , мы получаемъ систему слѣдующихъ двухъ уравненій, опредѣляющихъ функціи H и F_1 .

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi(x_1, x_2, x_3, F_1),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0.$$

Послѣднія уравненія принадлежатъ къ якобіевскому виду, представляющему частный случай дифференціальныхъ уравненій, теорія которыхъ изложена въ третьей главѣ настоящаго изслѣдованія. Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ интегрированію которой приводятся предыдущія уравненія, становится

$$dp_2 = \frac{dp_3}{-\varphi} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0}.$$

Система трехъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_1 = C_1, \quad H - \psi p_2 = C_2,$$

$$p_3 + \varphi p_2 = C_3$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 обозначаютъ три произвольныя постоянныя величины. Поэтому искомыя значенія функцій H и F_1 опредѣляются уравненіями

$$H = \psi p_2 + \Pi(x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2),$$

$$F_1 = \Pi_1(x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2), \quad (16)$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ, при чемъ выраженіе H зависитъ отъ значенія функціи F_1 , черезъ посредство функцій ψ и φ .

Кромѣ того обѣ функціи H и F_1 удовлетворяютъ уравненію (8). Послѣднее мы можемъ разсматривать какъ уравненіе, служащее для опредѣленія произвольной функціи Π_1 .

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Производное уравнение (7), для которого существует полный интеграл *С. Ли* первого класса, имѣетъ слѣдующій видъ

$$p_1 + \psi p_2 + \Pi(x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2) = 0,$$

при чемъ функции ψ , φ связаны уравненіемъ (15), а функция F_1 определяется уравненіями (8)-ымъ и (16)-ымъ. Искомый полный интегралъ определяется функцией F_1 и интеграломъ системы (14).

Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Предположимъ, что функции ψ и φ не зависятъ отъ функции F_1 и имѣютъ слѣдующія значенія, удовлетворяющія условію (15)-ому,

$$\psi = 0, \quad \varphi = 1.$$

Если дать функции Π значеніе $x_2 (p_2 + p_3)^2$, то соотвѣтствующее производное уравненіе *С. Ли* становится

$$p_1 + x_2 (p_2 + p_3)^2 = 0. \quad (17)$$

Соотвѣтствующее равенство (8) даетъ, для опредѣленія функции Π_1 , представляющей значеніе функции F_1 , слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} - u^2 \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} = 0,$$

гдѣ переменная величина u имѣетъ значеніе

$$u = p_2 + p_3.$$

Поэтому общій видъ функции F_1 выражается слѣдующей формулой

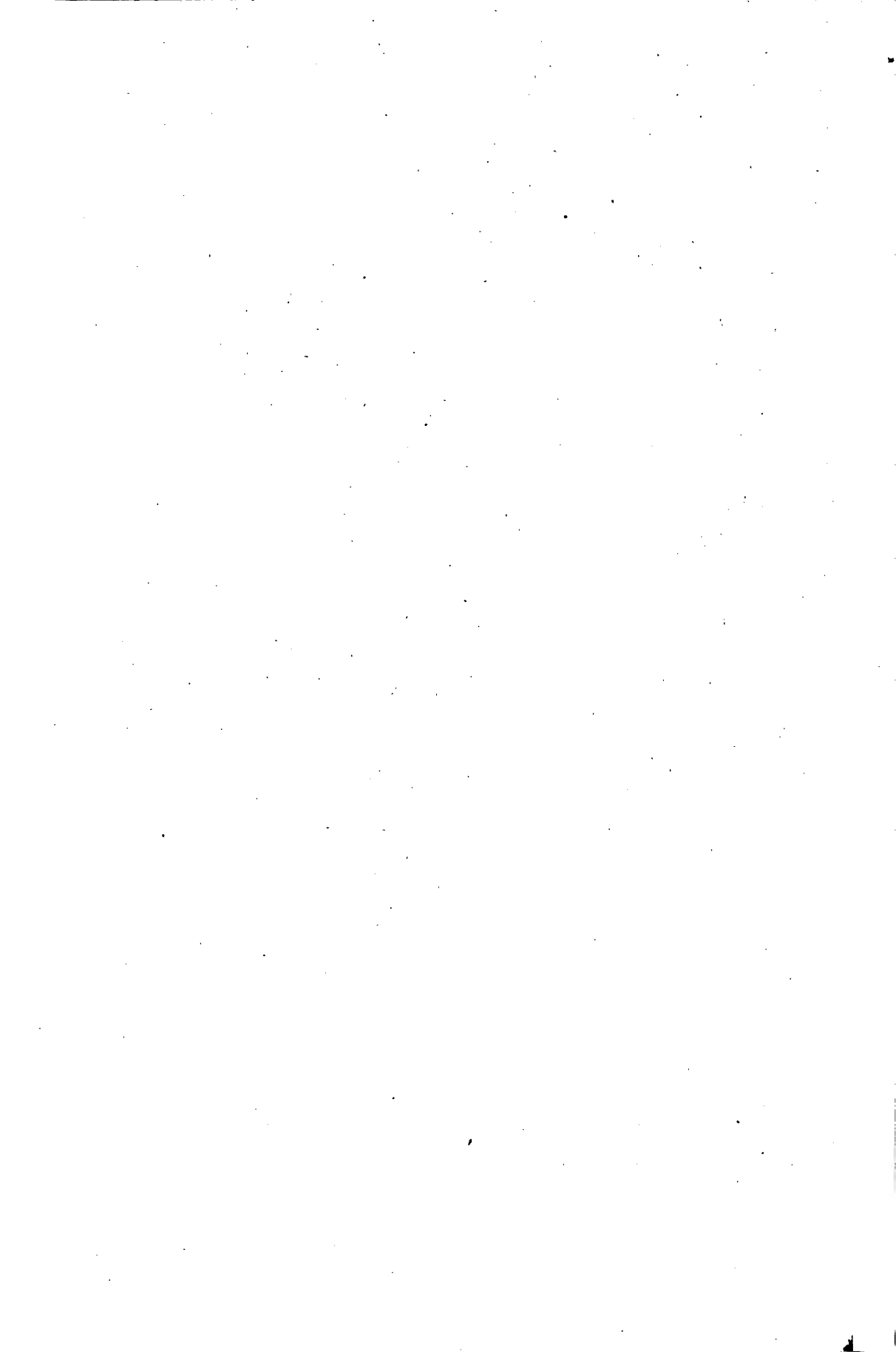
$$F_1 = \Pi_1 \left[x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3}, x_2 (p_2 + p_3)^2, x_3 - x_2 \right],$$

при чемъ Π_1 представляетъ произвольную функцию входящихъ въ нее аргументовъ. Наконецъ, уравненія (14) опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ функцию Φ

$$\Phi = \Pi_2 (x_3 - x_2, F_1),$$

гдѣ Π_2 —также произвольная функция входящихъ въ нее аргументовъ.

Приравнявъ двумъ различнымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ функции F_1 и Φ , мы получаемъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (17), систему, опредѣляющую искомый полный интегралъ *С. Ли*. Однако для этого достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ какихъ-либо



Томъ IX, № 3.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

Исслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными
перваго порядка одной неизвѣстной функціи. *Н. Н. Салтыкова.* . . 97

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества
издаются подъ редакціею распорядительнаго
комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по
мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть вы-
пусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ
адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій
Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ,
1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ
книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи
(48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества,
просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій
Университетъ.

Table des matières.

Pages.

Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles
du premier ordre d'une fonction inconnue; par *M. N. Saltykow* . . 97

More Math
Sci 905.75

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 4 и 5.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 4 и 5.

ХАРЬКОВЪ.

Паровая Типо-Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).

1905.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

двухъ различныхъ частныхъ значеній произвольныхъ функцій Π_1 и Π_2 . Такъ, напримѣръ, послѣднiя два уравненiя замѣнимъ слѣдующими двумя равенствами

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 двѣ различныя произвольныя постоянныя величины. Послѣднiя два уравненiя, совмѣстно съ даннымъ (17)-ымъ, приводятся къ виду

$$x_3 = x_2 + C_2, \\ p_1 = -\frac{x_2}{(x_1 - C_1)^2}, \quad p_2 = \frac{1}{x_1 - C_1} - p_3.$$

Поэтому послѣднее четвертое уравненiе искомага интегральнаго собранiя опредѣляется интегрированiемъ точнаго дифференциала

$$dz = -\frac{x_2 dx_1}{(x_1 - C_1)^2} + \frac{dx_2}{x_1 - C_1},$$

которое приводитъ къ искомому уравненiю

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3,$$

гдѣ C_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Такимъ образомъ совокупность послѣдняго уравненiя, совмѣстно съ тремя предыдущими, представляетъ искомое полное интегральное собранiе C . Ли перваго класса даннаго производнаго уравненiя (17).

3. Пусть имѣемъ производное уравненiе C . Ли въ пространствѣ пяти измѣренiй

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2, p_3, p_4) = 0. \quad (18)$$

Такъ какъ послѣднее уравненiе заключаетъ каноническiя перемѣнныя втораго класса, то, слѣдовательно, не допускаетъ полнаго интеграла C . Ли четвертаго класса.

Для того, чтобы имѣть полныя интегралы третьаго класса, рассматриваемое уравненiе (18), какъ хорошо извѣстно, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ перемѣнныхъ втораго класса.

Такимъ образомъ остается изслѣдовать только два случая, когда для даннаго уравненiя (18) существуютъ полныя интегралы C . Ли втораго и перваго классовъ.

Искомый интеграль второго класса опредѣляется очевидно тремя функціями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + H, F_i) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \\ (F_1, F_r) &= 0, \\ r &= 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

при чемъ функціи F_2 и F_3 находятся въ инволюціи и связаны слѣдующимъ образомъ съ F_1

$$\begin{aligned} F_{k+1} &\equiv \Phi_k(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1); \\ k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Изъ послѣднихъ значеній функцій Φ_1 и Φ_2 становится очевиднымъ, что условіе инволюціи обоихъ функцій F_2 и F_3 удовлетворяется тождественно.

Пусть имѣемъ неравенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \geq 0. \quad (20)$$

Принимая въ такомъ случаѣ F_1 за новую переменную величину вмѣсто p_2 , выводимъ изъ равенства (19) слѣдующую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной неизвѣстной функціи Φ , для опредѣленія обѣихъ функцій Φ_1 и Φ_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^4 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 F_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Коэффициенты послѣднихъ уравненій X_s , F_s имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \right), \quad F_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобками обозначается результатъ указанной замѣны перемен-
ной p_2 черезъ F_1 .

Искомые интегралы Φ_1 и Φ_2 системы (21) не должны зависеть
отъ переменныхъ p_3 и p_4 . Поэтому должны существовать слѣдующія
равенства, которыя получаются дифференцированиемъ уравненій (21) по
переменнымъ p_3 и p_4 ,

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^4 \frac{\partial Y_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad k=3, 4.$$

Легко видѣть, что послѣднія равенства не могутъ представлять новыхъ
уравненій, которыя служили-бы, совместно съ системой (21), для опре-
дѣленія искомымъ функций. Поэтому только-что полученные четыре ра-
венства должны представлять слѣдствія уравненій (21), и, слѣдовательно,
должны имѣть мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = \frac{\partial X_3}{Y_2} = \frac{\partial X_4}{Y_4}, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_3}{Y_3} = \frac{\partial Y_4}{Y_4}, \end{aligned} \right\} \quad k=3, 4. \quad (22)$$

Равенства послѣдней строки даютъ слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \lg \frac{Y_3}{Y_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_k} \lg \frac{Y_4}{Y_2} = 0, \quad k=3, 4.$$

Интегрируя систему послѣднихъ четырехъ уравненій, находимъ

$$\left. \begin{aligned} F_3 &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \\ F_4 &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ произвольныя функции входящихъ въ нихъ
переменныхъ величинъ.

Принимая во вниманіе, что, внутри рассматриваемой области из-
мѣненія нашихъ переменныхъ, существуетъ неравенство $Y_2 \geq 0$, полу-

чаемъ изъ первой строки равенствъ (22), на основаніи (23), слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial X_3}{\partial p_k} - \varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial X_4}{\partial p_k} - \varphi_2 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0,$$

$$k=3, 4,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_k} (X_3 - \varphi_1 X_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k} (X_4 - \varphi_2 X_2) = 0,$$

$$k=3, 4.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ зависимостямъ

$$\left. \begin{aligned} X_3 - \varphi_1 X_2 &= \psi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \\ X_4 - \varphi_2 X_2 &= \psi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

при чемъ ψ_1 и ψ_2 представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

На основаніи полученныхъ равенствъ (23) и (24), система уравненій (21) приводится къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Такъ какъ написанныя уравненія должны представлять нормальную систему, то мы получаемъ слѣдующія уравненія, для опредѣленія функцій $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Если возвратиться къ первоначальной системѣ переменныхъ, т. е. замѣнить переменную F_1 ея значеніемъ въ прежней переменной p_2 , то уравненія (23) и (24) дають слѣдующую систему, служащую для опредѣленія функцій H и F_1 ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \psi_1, & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \psi_2, & \frac{\partial F_1}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} &= 0.\end{aligned}$$

Полученныя уравненія представляютъ систему, принадлежащую къ типу разсмотрѣнныхъ нами въ предыдущей главѣ. Соответствующія имъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ имѣютъ слѣдующій видъ

$$dp_2 = -\varphi_1 dp_3 - \varphi_2 dp_4,$$

$$dH = \psi_1 dp_3 + \psi_2 dp_4,$$

$$dF_1 = 0.$$

Общій интегралъ послѣдней системы представляется равенствами

$$F_1 = C_1,$$

$$H - \psi_1 p_3 - \psi_2 p_4 = C_2,$$

$$p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4 = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 обозначаютъ три различныя произвольныя постоянныя величины. Поэтому, внутри разсматриваемой области измѣненія переменныхъ, функции H и F_1 опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$H = \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4), \quad (27)$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Для того, чтобы выполнить всѣ требованія нашей задачи, функція Π_1 должна удовлетворять первому уравненію (19), а функціи $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ системѣ уравненій (26).

Поэтому мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ C . Ли второго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4) = 0,$$

идеть Π —произвольная функция, а остальные функции $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ и F_1 определяются указанным выше образом, при помощи первого уравнения (19) и уравнений (26)—(27). Искомый полный интеграл определяется функцией F_1 и двумя различными интегралами системы уравнений (25).

Разсмотрим, наконец, условия существования полного интеграла С. Ли первого класса данного уравнения (18). Этот интеграл определяется тремя функциями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими следующим условиямъ

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + H, F_i) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \\ (F_1, F_2) &= 0, \\ (F_k, F_3) &= 0, \\ k &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

при чемъ функция F_3 связана следующимъ образомъ съ F_1 и F_2

$$F_3 \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2).$$

Пусть имѣемъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2, p_3}\right) \not\geq 0. \quad (29)$$

Принимая F_1 и F_2 за новыя независимыя переменныя вмѣсто p_2 и p_3 , выводимъ изъ равенствъ (28) слѣдующую систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, для опредѣленія функции Φ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^4 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 Z_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

гдѣ введены обозначенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \right), \quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s} \right), \quad Z_s = \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ произведенной замѣны переменныхъ.

Такъ какъ функція Φ не зависитъ отъ переменной p_4 , то существуютъ еще слѣдующія равенства

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial X_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^4 \frac{\partial Y_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial Z_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, отличныхъ отъ (30)-ыхъ, и представляютъ, стало-быть, слѣдствіе послѣднихъ уравненій. Поэтому получаются слѣдующія равенства, опредѣляющія функціи X_s , Y_s , Z_s ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial p_4} & \frac{\partial X_3}{\partial p_4} & \frac{\partial X_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Всѣ опредѣлители первыхъ частей написанныхъ равенствъ отличаются другъ отъ друга только элементами первой строки. Поэтому соотвѣтствующіе послѣднимъ опредѣлители-миноры имѣютъ одни и тѣ же значенія, которыя назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$A, B, C,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$A = Y_3 Z_4 - Y_4 Z_3,$$

$$B = Y_4 Z_2 - Y_2 Z_4,$$

$$C = Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2.$$

Въ силу послѣднихъ обозначеній, предыдущія три равенства представляются соответственно въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} A \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial X_4}{\partial p_4} &= 0, \\ A \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} &= 0, \\ A \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

На основаніи свойствъ опредѣлителей, мы имѣемъ два тождества

$$\left. \begin{aligned} AY_2 + BY_3 + CY_4 &= 0, \\ AZ_2 + BZ_3 + CZ_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Дифференцируя послѣднія по переменѣнной p_4 , получаемъ новыя тождества, на основаніи которыхъ послѣднія два уравненія (31) преобразовываются въ слѣдующія

$$\begin{aligned} Y_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Y_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Y_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} &= 0, \\ Z_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Z_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Z_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} &= 0. \end{aligned}$$

Въ силу введенныхъ выше обозначеній A, B, C черезъ величины всѣхъ Y_i и Z_i , легко вывести слѣдующія два уравненія изъ двухъ предыдущихъ

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial p_4}}{A} = \frac{\frac{\partial B}{\partial p_4}}{B} = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_4}}{C}.$$

Эти два уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial}{\partial p_4} \lg \frac{A}{C} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_4} \lg \frac{B}{C} = 0.$$

Интегрируя написанныя уравненія, находимъ

$$\left. \begin{aligned} A &= \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2) \cdot C, \\ B &= \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2) \cdot C, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ двѣ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

Такъ какъ, въ силу неравенства (29), определитель C отличенъ отъ нуля, то, на основаніи полученныхъ равенствъ (33), первое уравненіе (31) становится

$$\varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + \varphi_2 \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + \frac{\partial X_4}{\partial p_4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_4} (\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4) = 0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія представляетъ новое равенство

$$\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4 = \psi (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2), \quad (34)$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее переменныхъ величинъ.

Наконецъ, на основаніи уравненій (33) и условія $C \geq 0$, равенства (32) дають слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} Y_4 + \varphi_1 Y_2 + \varphi_2 Y_3 &= 0, \\ Z_4 + \varphi_1 Z_2 + \varphi_2 Z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Исключая выраженія X_4 , Y_4 , Z_4 , опредѣляемые уравненіями (34) и (35), изъ системы (30), преобразовываемъ ее къ новому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_3 = 0,$$

$$Y_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Y_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0,$$

$$Z_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0.$$

Въ силу неравенства нулю определителя C , выраженія, въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ, коэффициентами при которыхъ служатъ Y_2 и Z_2 , Y_3 и Z_3 , тождественно равны нулю, и мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій, для опредѣленія искомой функціи Φ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны представлять нормальную систему, то функціи ψ , φ_1 и φ_2 должны удовлетворять тремъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+1}} + \varphi_k \frac{\partial \psi}{\partial x_4} &= 0, \\ k &= 1, 2, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Наконецъ, для опредѣленія значеній функцій H , F_1 и F_2 , обращаемся къ уравненіямъ (34) и (35). Возвращаясь къ первоначальной системѣ переменныхъ p_2 и p_3 и внося значенія всѣхъ X , Y и Z , получаемъ изъ послѣднихъ уравненій слѣдующую систему яковлевскаго вида, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_3} &= \psi, \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_3} &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_3} &= 0. \end{aligned}$$

Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій становится

$$dp_4 = \frac{dp_2}{\varphi_1} = \frac{dp_3}{\varphi_2} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0} = \frac{dF_2}{0}.$$

Интегралы послѣдней системы представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad H - \psi p_4 = C_3.$$

$$p_2 - \varphi_1 p_4 = C_4, \quad p_3 - \varphi_2 p_4 = C_5,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 обозначаютъ пять произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Поэтому искомыя функціи H, F_1 и F_2 выражаются слѣдующимъ образомъ

$$H = \psi p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_2 = \Pi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4).$$

гдѣ Π, Π_1 и Π_2 обозначаютъ три произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Кромѣ того, чтобы выполнять всѣ требованія рассматриваемой задачи, функціи Π_1 и Π_2 должны удовлетворять первому, второму и четвертому уравненіямъ системы (28), а функціи $\psi, \varphi_1, \varphi_2$ уравненіямъ (37)

Итакъ, производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ C . Ли первой класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π —произвольная функція, а остальные функціи определяются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ определяется этими функціями F_1, F_2 и интеграломъ системы линейныхъ уравненій (36).

4. Приведенныя выше вычисленія легко распространяются на производныя уравненія C . Ли въ пространствѣ сколькихъ угодно измѣреній и позволяютъ составить общій видъ уравненій, допускающихъ полные интегралы того или другого класса.

Пусть имѣемъ, въ пространствѣ $n-1$ измѣреній, производное уравненіе C . Ли

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (38)$$

Полный интегралъ C . Ли q -аго класса послѣдняго уравненія определяется $n-1$ функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1},$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$(p_1 + H, F_k) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

и связанными между собой зависимостями слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i-1} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Предположимъ, что существуетъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}}\right) \geq 0. \quad (39)$$

Принимая величины $F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}$ за новыя независимыя переменныя вмѣсто p_2, p_3, \dots, p_{n-q} , составляемъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій, для опредѣленія всѣхъ функций Φ_i ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^n Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_s \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ выполненной замѣны переменныхъ.

Такъ какъ функции Φ_i не зависятъ отъ переменныхъ величинъ

$$p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n,$$

то дифференцируя предыдущія равенства по послѣднимъ переменнымъ, находимъ

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=2}^n \frac{\partial X_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^n \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q .

Последнія равенства не должны давать новых уравнений, для опредѣленія функции Φ . Поэтому каждое изъ этихъ равенствъ должно являться слѣдствіемъ послѣднихъ $n-q-1$ уравненій (40).

Начнемъ съ преобразованія послѣднихъ уравненій. Назовемъ черезъ Δ слѣдующій опредѣлитель

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1, n-q} \\ Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2, n-q} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ Y_{n-q-1, 2} & Y_{n-q-1, 3} & \dots & Y_{n-q-1, n-q} \end{vmatrix}$$

и черезъ Δ_{rk} обозначимъ опредѣлитель, который получается изъ послѣдняго замѣной его элементовъ r -аго столбца соотвѣтственно слѣдующими величинами

$$Y_{1, n-q+k}, Y_{2, n-q+k}, \dots, Y_{n-q-1, n-q+k}.$$

Благодаря введеннымъ обозначеніямъ, послѣднія $n-q-1$ уравненій (40), принимая во вниманіе неравенство (39), или $\Delta \geq 0$, преобразовываются къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} = - \sum_{k=1}^q \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}},$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1.$$

Такъ какъ равенства (41) должны представлять слѣдствія послѣднихъ уравненій, то мы получаемъ слѣдующія равенства, которымъ удовлетворяютъ функціи X_s и $Y_{\sigma s}$,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} &= 0, \\ \Delta \frac{\partial Y_{\sigma, n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial Y_{\sigma, r+1}}{\partial p_{n-q+i}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$k=1, 2, \dots, q, \quad \sigma=1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$i=1, 2, \dots, q.$$

Въ силу свойствъ опредѣлителей, существуютъ тождества

$$\Delta Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} Y_{\sigma, r+1} = 0, \quad (43)$$

для всѣхъ значеній σ , отъ 1 до $n-q-1$, и значеній k , отъ 1 до q .
Дифференцируя послѣднія тождества по переменнымъ

$$p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n,$$

получаемъ рядъ новыхъ тождествъ, на основаніи которыхъ уравненія второй строки системы (42) преобразовываются въ слѣдующія

$$\left. \begin{aligned} Y_{\sigma, n-q+k} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} Y_{\sigma, r+1} \frac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

при чемъ k принимаетъ значенія, отъ 1 до q , и i , отъ 1 до $n-q-1$.

Система $n-q-1$ уравненій (44) линейна относительно $n-q-1$ величинъ

$$\frac{\partial \Delta_{1k}}{\partial p_{n-q+i}}, \frac{\partial \Delta_{2k}}{\partial p_{n-q+i}}, \dots, \frac{\partial \Delta_{n-q-1, k}}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Опредѣлитель, составленный изъ коэффициентовъ при послѣднихъ величинахъ въ рассматриваемыхъ уравненіяхъ равенъ Δ и, стало-быть, отличенъ отъ нуля. Поэтому уравненія (44) даютъ

$$\frac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}}, \quad r = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

при чемъ k принимаетъ всѣ значенія, отъ 1 до q , и i , отъ 1 до $n-q-1$. Изъ послѣднихъ уравненій выводятся слѣдующія

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+i}} \lg \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

для всѣхъ значеній r , отъ 1 до $n-q-1$, и k , отъ 1 до q .

Интегрируя послѣднія уравненія, находимъ

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{rk} = g_{rk} (x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q+1}) \Delta, \\ r = 1, 2, \dots, n-q, \quad k = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

гдѣ φ_{rk} представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Поэтому уравненія первой строки системы (42) становятся

$$\frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+k}} \left(X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} \right) = 0,$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, q.$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ

$$X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} = \psi_k (x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \quad \left. \begin{matrix} \\ k=1, 2, \dots, q, \end{matrix} \right\} \quad (46)$$

при чемъ ψ_k обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

Наконецъ, равенства (43), на основаніи полученныхъ выше уравненій (45), даютъ новыя зависимости

$$Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma, r+1} = 0, \quad \left. \begin{matrix} \\ \sigma=1, 2, \dots, n-q-1, \quad k=1, 2, \dots, q. \end{matrix} \right\} \quad (47)$$

На основаніи полученныхъ уравненій (46) и (47), система уравненій (40) приводится къ такому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{r=1}^{n-q-1} X_{r+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} \right) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{n-q+1} Y_{\sigma, r+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} \right) = 0,$$

$\sigma=1, 2, \dots, n-q-1.$

Такъ какъ определитель Δ отличенъ отъ нуля, то очевидно, что эта система $n-q$ уравненій преобразовывается въ слѣдующую

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^b \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$r = 1, 2, \dots, n-q-1.$

Вслѣдствіе нормальности послѣдней системы, функции ψ_k , φ_{rk} удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \left(\psi_k \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}} - \varphi_{rk} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-q+k}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{\sigma+1}} + \sum_{k=1}^q \left(\varphi_{rk} \frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{n-q+k}} - \varphi_{\sigma k} \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$i = 1, 2, \dots, q,$

при чемъ r и σ принимаютъ всѣ возможные, одновременно различныя значенія, отъ 1 до $n-q-1$.

Подставляя далѣе значенія всѣхъ функций X_i и Y_{σ} , въ уравненія (46) и (47) и возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, мы получаемъ, для опредѣленія функций H , F_1 , F_2, \dots, F_{n-q-1} , слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій, принадлежащихъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ предыдущей третьей главѣ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} &= \psi_k, \\ \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{r+1}} &= 0, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, q, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1.$

Соотвѣтствующія линейныя уравненія съ частными производными одной функции f имѣютъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial f}{\partial p_{r+1}} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial H} = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, q,$

и образуютъ очевидно якобіевскую систему, такъ какъ эти уравненія не зависятъ отъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial F_\sigma}$, а коэффициенты уравненій не заключаютъ переменныхъ, по которымъ взяты частныя производныя функціи f . Поэтому изслѣдуемая задача интегрированія приводится къ системѣ уравненій въ полныхъ дифференциалахъ

$$dp_{r+1} = - \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} dp_{n-q+k},$$

$$dH = \sum_{k=1}^q \psi_k dp_{n-q+k},$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$dF_\sigma = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1.$$

Полная система интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_\sigma = C_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$H - \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} = C_{n-q},$$

$$p_{r+1} - \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} p_{n-q+k} = C_{n-q+r},$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1.$$

Слѣдовательно, искомыя функціи имѣютъ значенія

$$H = \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}),$$

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k}, p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots,$$

$$\dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma=1, 2, \dots, n-q-1,$$

гдѣ $P, P_1, P_2, \dots, P_{n-q-1}$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Чтобы удовлетворить требованіямъ задачи функціи P_i должны выполнять всѣ указанныя выше условія инволюціи, а всѣ функціи φ и ψ должны опредѣляться системой (49)-ой.

Такимъ образомъ получается слѣдующій результатъ:

Производное уравненіе (38), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q-аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} + P(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k}, \\ p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}) = 0,$$

гдѣ P представляетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ, а остальные функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ выражается при помощи функцій $F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}$ и q различныхъ интеграловъ системы уравненій (48).

5. Пусть имѣемъ, наконецъ, систему производныхъ уравненій въ инволюціи

$$p_k + H_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (50)$$

Полный интегралъ С. Ли q -аго класса, при условіи, что $q < n-m$ (см. стр. 62), опредѣляется $n-m$ функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-m},$$

удовлетворяющими уравненіямъ

$$(p_k + H_k, F_s) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, m, \quad s=1, \dots, n-m, \end{array} \right\} \quad (51)$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-m-q+i} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}), \\ i=1, 2, \dots, q.$$

Предполагая слѣдующій функциональный опредѣлитель отличнымъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}} \right),$$

принимая величины $F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$ за новыя независимыя переменныя вмѣсто $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}$. Въ такомъ случаѣ система уравненій, для опредѣленія функцій Φ_i , становится

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{s=m+1}^n X_{ks} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{s=m+1}^n Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sigma &= 1, 2, \dots, n-m-q, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_{ks} \equiv \left(\frac{\partial H_k}{\partial p_s} \right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобки имѣютъ прежнее значеніе. При помощи разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, составляются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial X_{ks}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

которыя должны быть слѣдствіями послѣднихъ $n-m-q$ уравненій системы (52).

Не вдаваясь въ подробности вычисленій, которыя весьма немногимъ отличаются отъ вычисленій предыдущаго n^0-a , мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Система производных уравнений в инволюции (50), для которой существует полный интеграл C . Ли q -го класса, представляется в следующем виде

$$p_k + \sum_{i=1}^q \psi_{ki} p_{n-q+i} + \Pi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1} + \sum_{i=1}^q \varphi_{1i} p_{n-q+i}, \\ p_{m+2} + \sum_{i=1}^q \varphi_{2i} p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q} + \sum_{i=1}^q \varphi_{n-m-q, i} p_{n-q+i}) = 0, \\ k=1, 2, \dots, m,$$

где $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ обозначают произвольные функции входящих в них аргументов, а все $\psi_{ki}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots, \varphi_{n-m-q, i}$ представляют функции переменных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$$

и удовлетворяют уравнениям, которые вытекают из условий нормальности следующей яковиевской системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \psi_{ki} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+i}} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+r}} + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+i}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (53) \\ k=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n-m-q.$$

Функции $F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$ представляются в виде

$$F_\sigma = \Pi'_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1} + \sum_{i=1}^q \varphi_{1i} p_{n-q+i}, \\ p_{m+2} + \sum_{i=1}^q \varphi_{2i} p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q} + \sum_{i=1}^q \varphi_{n-m-q, i} p_{n-q+i}), \\ \sigma=1, 2, \dots, n-m-q,$$

где Π'_σ обозначают произвольные функции входящих в них аргументов и кроме того должны удовлетворять уравнениям (51) и условию инволюции всех функций F_σ . Искомый полный интеграл определяется совокупностью последних $n-m-q$ функций и q различными интегралами системы уравнений (53).

6. До сихъ поръ мы рассматривали только уравненія, которыя не заключаютъ переменнѣй z . Пусть имѣемъ, наконецъ, уравненіе, зависящее отъ z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (54)$$

Полный интегралъ S . Ли q -аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется n функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

удовлетворяющими условіямъ (см. н^о 4, второй главы)

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - H \frac{\partial F_s}{\partial z} + [H, F_s] = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n,$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \\ i = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Предполагая существованіе неравенства

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}} \right) \geq 0, \quad (55)$$

составляемъ, какъ и въ прежнихъ случаяхъ, слѣдующую систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ всѣ функціи Φ_{i+1} ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + X \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ \sum_{s=2}^n Y_{s\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + Y_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

гдѣ коэффициенты $X_s, Y_{s\sigma}$ имѣютъ прежнія значенія и

$$X = \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H \right), \\ Y_\sigma = \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} p_s \right).$$

Легко вывести, при помощи вычисленій, аналогичныхъ предыдущимъ, слѣдующія зависимости

$$\left. \begin{aligned} X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \psi_{rk} X_{r+1} &= \psi_k, \\ X - \sum_{r=1}^{n-q-1} g_r X_{r+1} &= \psi, \\ Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma, r+1} &= 0, \\ Y_{\sigma} - \sum_{r=1}^{n-q-1} g_r Y_{\sigma, r+1} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, q, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

гдѣ обозначенія φ_{rk} , φ_r , ψ_k , ψ представляютъ произвольныя функціи величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}.$$

Наконецъ, уравненія, опредѣляющія искомыя интегралы Φ_{i+1} , становятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q g_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + g_r \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

и должны представлять яacobievскую систему.

Возвращаясь къ первоначальной системѣ переменныхъ, получаемъ изъ равенствъ (56), послѣ нѣкоторыхъ приведеній, слѣдующую систему уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} g_{rk} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} &= \psi_k, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} (p_{r+1} - g_r + \sum_{i=1}^q g_{ri} p_{n-q+i}) \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} &+ \\ &+ \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} = H + \psi, \\ \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} g_{rk} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{r+1}} &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} (p_{r+1} - g_r + \sum_{i=1}^q g_{ri} p_{n-q+i}) \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{r+1}} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, q, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Равенства послѣдней строки, а затѣмъ и второй преобразовываются, въ силу условія (55), въ слѣдующія уравненія

$$p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} p_{n-q+i} = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$H = \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} = \psi.$$

Какъ легко видѣть, уравненія первой строки системы (58) удовлетворяются на основаніи послѣдняго значенія функціи H . Наконецъ, уравненія третьей строки системы (58) даютъ, при помощи интегрированія,

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k}, \\ p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}), \\ \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

при чемъ Π_σ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Производное уравненіе С. Ли (54), заключающее переменную z , для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} = \psi,$$

при чемъ всѣ входящія функціи опредѣляются указанными выше условіями и формулами. Искомый полный интегралъ выражается при помощи $n-q-1$ послѣднихъ написанныхъ функцій F_σ и $q+1$ различныхъ интеграловъ яковіевской системы уравненій (57).

Полученное уравненіе отличается отъ прежнихъ результатовъ своей правой частью ψ , которая представляетъ произвольную функцію, зависящую отъ каноническихъ переменныхъ второго класса только черезъ посредство функцій F_σ . Это послѣднее обстоятельство находится въ тѣсной зависимости отъ того, что, во-первыхъ, рассматриваемое нами уравненіе заключаетъ переменную величину z и, во-вторыхъ, рассматриваемое интегральное собраніе представляется, въ послѣднемъ случаѣ, совокупностью $n-1$ уравненій, зависящихъ также отъ переменной z .

Мы не станемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи уравненій, допускающихъ полные интегралы С. Ли того или другого класса. Хотя полученные результаты представляютъ искомыя уравненія, при помощи опредѣленій, выраженныхъ въ весьма общей формѣ, тѣмъ не менѣе найденныя формулы достаточно разъясняютъ нашу основную идею, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для производныхъ уравненій весьма частнаго вида. Дѣйствительно, какъ легко видѣть, всѣ полученныя нами уравненія принадлежатъ къ типу такъ называемыхъ *уравненій раздѣляющихъ переменныя* ¹⁾. Такимъ образомъ теорія С. Ли не представляетъ, для насъ, обобщенія классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, но рассматриваетъ только нѣсколько новыхъ задачъ, представляющихъ аналогію съ задачами интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Поэтому мы будемъ въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи лишь по столько касаться изслѣдованій С. Ли, по сколько рассматриваемые имъ вопросы послужили къ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

¹⁾ Ср. *Imschenetsky*. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. p. 75.

Goursat, E. — Leçons sur l'intégration des équations.... p. 152.

Г Л А В А V.

Касательныя преобразованія.

1. Поверхностный элемент называется еще иначе *касательнымъ элементомъ*. Какъ говорятъ *касательный элементъ* принадлежитъ поверхности, кривой или точкѣ, если онъ опредѣляется точкой послѣдняго геометрическаго мѣста и касательной къ нему плоскостью, проведенной въ послѣдней точкѣ.

Мы говоримъ, что два *геометрическія мѣста* имѣютъ общій касательный элементъ, если, проходя черезъ одну и ту же точку, оба геометрическія мѣста имѣютъ въ ней общую касательную плоскость.

Аналогичнымъ образомъ два геометрическія собранія поверхностныхъ элементовъ называются *касательными*, если они имѣютъ общій поверхностный элементъ.

Всякое преобразованіе, при помощи котораго какія-либо два касательныхъ собранія преобразовываются также въ касательныя собранія, называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) преобразованіемъ.

Послѣднія понятія распространяются на преобразованія въ пространствахъ сколькихъ угодно измѣреній.

Пусть въ пространствахъ n измѣреній переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

обозначаютъ координаты поверхностнаго элемента какого-либо геометрическаго собранія. Обозначимъ новыя переменныя, въ которыхъ представляется послѣднее преобразованное собраніе, черезъ

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n.$$

Въ виду того, что рассматриваемые нами поверхностныя элементы образуютъ собраніе, то опредѣляющія ихъ, аналитически, переменныя удовлетворяютъ равенству

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = 0. \quad (1)$$

Такъ какъ преобразованная къ новымъ переменнымъ система поверхностныхъ элементовъ также должна представлять геометрическое собраніе, то новыя переменныя должны необходимо удовлетворять условію

$$dz' - \sum_{s=1}^n p'_s dx'_s = 0. \quad (2)$$

Чтобы перейти отъ выраженія рассмотрѣннаго геометрическаго собранія въ прежнихъ переменныхъ къ его представленію въ новыхъ переменныхъ, т. е. чтобы совершить аналитическое преобразованіе, необходимо имѣть выраженія переменныхъ одной системы черезъ другую. Предположимъ, на примѣръ, что новыя переменныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ первоначальныя переменныя

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= X_s (x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ z' &= Z (x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ p'_s &= P_s (x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$s=1, 2, \dots, n.$

Такъ какъ прежнія переменныя должны въ свою очередь выражаться черезъ новыя переменныя, то послѣднія уравненія (3) разрѣшимъ относительно всѣхъ переменныхъ x, z, p и дадутъ ихъ значенія въ переменныхъ x'_s, z, p'_s .

Если обѣ системы разсматриваемыхъ переменныхъ удовлетворяютъ зависимостямъ (1) и (2), то уравненія (3) должны для этого обладать опредѣленными свойствами, которыя легко вывести.

Равенства (3) условимся называть *формулами* или *уравненіями преобразованія* и подраздѣлять ихъ на различные классы, въ зависимости отъ числа уравненій, которыя даетъ система (3) между однѣми переменными

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z'. \quad (4)$$

Такъ, если результатъ исключенія переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n изъ $n+1$ первыхъ уравненій (3) приводитъ къ $m+1$ зависимостямъ между предыдущими переменными, то опредѣляемое формулами (3) касательное преобразованіе мы будемъ называть *m-аго класса*.

Наименьшимъ возможнымъ классомъ касательныхъ преобразованій является очевидно нулевой, такъ какъ изъ системы $n+1$ уравненій всегда возможно исключить n переменныхъ и получить всегда одну зависимость между переменными величинами (4).

Наконецъ, касательное преобразование n -аго класса заключаетъ $n + 1$ различныхъ зависимостей между переменными (4), которыя выражаютъ прежнія переменныя черезъ новыя, и такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ точечнымъ преобразованиемъ переменныхъ.

Введеніе въ анализъ понятій о касательныхъ преобразованіяхъ принадлежитъ Эйлеру. Затѣмъ Лежандръ и Якоби пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ нѣкоторыми касательными преобразованіями частнаго вида, когда за новыя независимыя переменныя принимаются прежнія частныя производныя. Наконецъ, общая теорія разсматриваемыхъ преобразованій была создана трудами С. Ли ¹⁾.

Существуетъ нѣсколько способовъ изложенія основныхъ предложеній ученія о касательныхъ преобразованіяхъ ²⁾. До сихъ поръ обыкновенно считалось наиболѣе простымъ изложеніе разсматриваемой теоріи С. Ли, которое было дано А. Майеромъ. Намъ представляется однако, что соображенія, лежащія въ основаніи изложенія С. Ли, позволяютъ гораздо проще представить изслѣдуемую теорію, чѣмъ это было сдѣлано А. Майеромъ. Легко убѣдиться въ этомъ изъ послѣдующихъ строкъ, гдѣ мы будемъ исходить изъ изученныхъ выше свойствъ уравненій, представляющихъ собранія поверхностныхъ элементовъ.

Пусть формулы (3) представляютъ касательное преобразование, на основаніи котораго лѣвыя части уравненій (1) и (2) взаимно преобразовываются другъ въ друга, такъ что существуетъ слѣдующая зависимость

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{s=1}^n p'_s dx'_s), \quad (5)$$

гдѣ σ представляетъ функцію переменныхъ величинъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z, p'_1, p'_2, \dots, p'_n$.

Написанное равенство является основнымъ въ разсматриваемой теоріи и послужить для изученія свойствъ формулъ преобразованія (3).

Исходя изъ послѣдняго равенства (5), легко представить формулы (3) въ слѣдующемъ видѣ. Для симметричности вычисленій обозначимъ черезъ

¹⁾ S. Lie.—Begründung einer Invarianten—Theorie der Berührungs—Transformationen (Mathematische Annalen, Bd. 8, S. 215).

S. Lie u. F. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen. Abschnitt II, S. 114.

²⁾ A. Mayer.—Directe Begründung der Theorie der Berührungs—Transformationen (Mathematische Annalen. Bd. 8, S. 304).

G. Darboux.—Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p.p. 80, 250.

G. Darboux. Sur le problème de Pfaff (Bulletin des Sciences Mathématiques. t. VI. 2-e série).

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{2n}, \xi_{2n+1}$$

соответственно наши переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n,$$

и затѣмъ введемъ обозначенія

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots, \eta_{2n}, \eta_{2n+1},$$

соответственно вмѣсто слѣдующихъ величинъ

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \sigma, -\sigma p'_1, \dots, -\sigma p'_{n-1}, -\sigma p'_n.$$

Благодаря послѣднимъ обозначеніямъ, равенство (5) становится

$$dz - \sum_{s=1}^{2n+1} \eta_s d\xi_s = 0 \quad (6)$$

и опредѣляетъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $2n+2$ измѣреній.

Общій видъ собраній поверхностныхъ элементовъ m -аго класса выражается здѣсь слѣдующими уравненіями (ср. стр. 17—18)

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - H, \\ \xi_{2n-m+i+1} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_{2n-m+i+1}}, \quad \eta_k = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, \dots, 2n-m+1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^m \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - \varphi,$$

причемъ φ_i и φ обозначаютъ функціи всѣхъ переменныхъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1}.$$

Въ частномъ случаѣ рѣшеніе нулевого класса разсматриваемаго уравненія (6), или (5)-аго, при сохраненіи первоначальнаго обозначенія переменныхъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$p_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \quad \sigma p'_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'_s},$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Въ силу послѣдняго значенія σ , n предыдущія равенства становятся

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} p'_s = 0.$$

Если первое изъ написанныхъ нами уравненій разсматриваемаго рѣшенія представить въ слѣдующемъ общемъ видѣ, неразрѣшенномъ относительно перемѣнной z ,

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z') = 0,$$

то разсматриваемое рѣшеніе нулевого класса представляется совокупностью послѣдняго написаннаго уравненія и слѣдующихъ равенствъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_s = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x'_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p'_s = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Такимъ образомъ формулы касательнаго преобразованія нулевого класса вполнѣ опредѣляются при помощи одной только функціи Φ , опредѣляемой уравненіемъ, которое называется *основной формулой* преобразованія.

2. Такъ какъ равенства (3) представляютъ формулы преобразованія, при помощи которыхъ уравненіе (1) преобразовывается во (2)-е, то формулы (3), совмѣстно съ однимъ новымъ уравненіемъ, опредѣляющимъ соответствующее значеніе множителя σ , утождествляютъ равенство (5), представляя его рѣшенія и, стало-быть, должны заключаться въ формулахъ вида (7). Какъ и раньше въ предыдущемъ n^0 , относимъ къ первому классу каноническихъ перемѣнныхъ всѣ величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

и ко второму классу соответственно переменныя

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \sigma, q_1, q_2, \dots, q_n,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$\left. \begin{aligned} q_s &= -\sigma p'_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Поэтому равенство (5) принимаетъ видъ

$$dz = \sum_{s=1}^n p_s dx_s + \sigma dz' + \sum_{s=1}^n q_s dx'_s. \quad (9)$$

Присоединяя къ уравненіямъ (3) еще одно новое уравненіе опредѣляющее значеніе множителя σ въ прежнихъ переменныхъ x_s, z, p_s , получаемъ, на основаніи равенствъ (8), слѣдующую систему уравненій, представляющую рѣшеніе уравненія (9),

$$\left. \begin{aligned} X_s - x'_s &= 0, & Z - z' &= 0, \\ P_s + \frac{q_s}{\sigma} &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, n, \\ R - \sigma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

гдѣ прежнія выраженія X_s, Z, P_s и функція R представлены всѣ въ прежнихъ переменныхъ.

Какъ доказано выше, въ н^о 2 второй главы, уравненія, опредѣляющія собраніе поверхностныхъ элементовъ, образуютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (10), должны уничтожаться. Составляя послѣднія скобки, мы будемъ обозначать прямыми скобками [...] только скобки Вейлера, распространяемыя на прежнія переменныя; что же касается остальныхъ членовъ разсматриваемыхъ скобокъ, которые распространяются на новыя переменныя, то мы будемъ вычислять ихъ непосредственно.

Такъ какъ уравненія первой строки системы (10) зависятъ отъ z' и новыхъ переменныхъ только одного класса, то легко видѣть, что должны существовать слѣдующія тождества

$$[X_i, X_k] \equiv 0, [X_i, Z] \equiv 0, \quad (11)$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k , отъ 1 до n .

Для составленія остальных скобокъ, замѣчаемъ, что существуютъ слѣдующія символическія равенства

$$\frac{d}{dx'_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{\partial z'} q_i, \quad \frac{d}{dz'} \equiv \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma.$$

Поэтому, приравнивая нулю скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій системы (10), получаемъ равенства

$$[X_i, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (X_i - x'_i) + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (Z - z') + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, P_k] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} P_k - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_k - \\ - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} P_i + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_i = 0,$$

$$[X_i, R] + \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, R] + \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, R] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} (R - \sigma) - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (R - \sigma) + \\ + \frac{d}{dz'} P_i = 0.$$

Какъ легко видѣть имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{d}{dx'_s} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} q_s - \begin{cases} 1, & s = i, \\ 0, & s \neq i, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx_i}(Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} q_i,$$

$$\frac{d}{dz'}(Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma - 1,$$

$$\frac{d}{dx_i} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} q_i, \quad \frac{d}{dz'} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx_i}(R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} q_i,$$

$$\frac{d}{dz'}(R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} \sigma.$$

На основаніи послѣднихъ тождествъ и въ силу зависимостей (8), предыдущія равенства приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} [X_i, P_k] &\equiv \begin{cases} 0, i \geq k, \\ -\frac{1}{\sigma}, i = k. \end{cases} \\ [Z, P_k] &\equiv -\frac{P_k}{\sigma}, \\ [P_i, P_k] &\equiv 0, \\ [X_i, R] &\equiv -\frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma, \\ [Z, R] &\equiv 1 - \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma, \\ [P_i, R] &\equiv \frac{\partial P_i}{\partial z} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k , отъ 1 до n .

Полученныя равенства (11) и (12) представляютъ основныя тождества, характеризующія собой касательное преобразование (3).

Легко видѣть, что тождества (11) и (12) представляютъ не только необходимыя но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточныя условія для того, чтобы формулы (3) опредѣляли касательное преобразование. Въ самомъ дѣлѣ.

данныя тождества (11) и (12) показываютъ, что уравненія (10) образуютъ замкнутую систему. Стало-быть, на основаніи уравненій (10), удовлетворяется равенство (9), или (5) (см. стр. 42—44), которое и представляетъ аналитическое опредѣленіе касательныхъ преобразованій.

Отмѣтимъ особенно одинъ частный случай касательныхъ преобразованій, когда соотвѣтствующія формулы преобразованія (3) таковы, что всѣ функции X_i и P_i не зависятъ отъ перемѣнной величины z , которая входитъ только въ выраженіе функции Z въ слѣдующей формѣ

$$Z \equiv Az + F(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

такъ что $n + 1$ -ое уравненіе системы (3) становится

$$z' - Az = F.$$

Такимъ образомъ перемѣнныя z' и z входятъ всего въ одно изъ уравненій формулъ преобразованія и только въ одной совмѣстной комбинаціи

$$z' - Az.$$

Поэтому соотвѣтствующее настоящему случаю первое уравненіе системы (7), которое разрѣшено относительно перемѣнной z , становится

$$z - \frac{1}{A} z' = \varphi,$$

гдѣ функція φ не зависитъ отъ каноническихъ перемѣнныхъ второго класса. Такъ какъ остальные уравненія разсматриваемаго собранія не заключаютъ перемѣнныхъ z и z' , то, чтобы равенство (5) уничтожалось на основаніи послѣднихъ уравненій, необходимо должно существовать слѣдующее равенство

$$\sigma = \frac{1}{A},$$

т. е. при преобразованіи разсматриваемаго частного случая, *множитель σ долженъ представлять постоянную величину*. Не нарушая общности разсужденій, возможно положить A равнымъ единицѣ, такъ какъ для этого стоитъ только, вмѣсто z' , принять величину $\frac{1}{A} z'$ за новую перемѣнную.

Въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ формулы (11) остаются безъ измѣненія.

Что касается равенствъ первыхъ трехъ строкъ системы (12), то они, въ разсматриваемомъ предположеніи, принимаютъ слѣдующій видъ

$$(X_i, P_k) \equiv \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ -1, & i = k, \end{cases}$$

$$[Z, P_k] \equiv -P_k,$$

$$(P_i, P_k) \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k , отъ 1 до n .

Наконецъ, остальные равенства системы (12) въ настоящемъ случаѣ уничтожаются тождественно.

3. Приведенныя выше формулы (7) показываютъ, что уравненія касательнаго преобразованія m -аго класса опредѣляются вполне, при помощи $m+1$ зависимостей между переменными z, z' и каноническими переменными перваго класса какъ первоначальной такъ и новой системы переменныхъ величинъ.

На послѣдующихъ строкахъ мы разсмотримъ, слѣдуя С. Ли, задачу составленія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, исходя изъ нѣсколькихъ ихъ данныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ $n+1$ различныхъ функцій въ инволюціи

$$X_1, X_2, \dots, X_n, Z, \quad (13)$$

зависящихъ отъ переменныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$. Въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто тождества

$$[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k , отъ 1 до n .

Легко показать, что, при помощи элементарныхъ операцій, всегда возможно найти n функцій прежнихъ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

удовлетворяющихъ равенству (5), т. е. выполняющихъ всѣ условія (12).

Подставляя въ равенство (5) значенія, получаемыя изъ первыхъ $n+1$ данныхъ уравненій (3),

$$dz' = \sum_{r=1}^n \frac{\partial Z}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial Z}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^n \frac{\partial Z}{\partial p_r} dp_r,$$

$$dx'_s = \sum_{r=1}^n \frac{\partial X_s}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial X_s}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^n \frac{\partial X_s}{\partial p_r} dp_r,$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

получаемъ слѣдующій результатъ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} - \frac{1}{\sigma} \right) dz + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} + \frac{p_r}{\sigma} \right) dx_r \\ & + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} \right) dp_r = 0. \end{aligned}$$

Предполагая, что переменныя величины $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ не связаны между собой никакими зависимостями, мы приходимъ къ заключенію, что коэффициенты при ихъ дифференціалахъ въ послѣднемъ тождествѣ должны уничтожаться. Такимъ образомъ получается слѣдующій рядъ новыхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} &= \frac{1}{\sigma}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} &= -\frac{p_r}{\sigma}, \\ \frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$r = 1, 2, \dots, n.$

Исключивъ множитель σ изъ первыхъ $n+1$ равенствъ, получаемъ n слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{dX_s}{dx_r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$r = 1, 2, \dots, n$

Легко показать, что въ системѣ $2n$ уравненій, образованныхъ сейчасъ полученными n равенствами (15) и n послѣдними равенствами (14), существуютъ только n различныхъ между собой уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ n слѣдующихъ тождествъ

$$[Z, X_k] - \sum_{s=1}^n P_s [X_s, X_k] = 0, \\ k=1, 2, \dots, n.$$

Послѣ раскрытія скобокъ Вейлера и приведенія, написанныя тождества приводятся къ виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^n \left[\frac{dX_k}{dx_r} \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} \right) - \right. \\ \left. \frac{\partial X_k}{\partial p_r} \left(\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{dX_s}{dx_r} \right) \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16) \\ k=1, 2, \dots, n.$$

Легко видѣть, что, вслѣдствіе условій инволюціи функцій (13), по меньшей мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей n -аго порядка слѣдующей матрицы долженъ быть отличнымъ отъ нуля ¹⁾

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} & \frac{dX_1}{dx_2} & \dots & \frac{dX_1}{dx_n} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} & \dots & \frac{dX_2}{dx_n} & \frac{\partial X_2}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \dots & \frac{dX_n}{dx_n} & \frac{\partial X_n}{\partial p_1} & \frac{\partial X_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Поэтому равенства (16) представляютъ n различныхъ уравненій относительно выраженій, представляющихъ лѣвыя части уравненій системы, состоящей изъ послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15). Слѣдовательно, изъ послѣдней системы уравненій только n различныхъ между собой, остальные же n уравненій уничтожаются, на основаніи предыдущихъ, въ силу зависимостей (16).

Кромѣ того, вслѣдствіе неравенства нулю по меньшей мѣрѣ одного изъ упомянутыхъ опредѣлителей матрицы, становится очевиднымъ, что

¹⁾ См. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p.p. 274, 246.

соотвѣтствующія ему n различныхъ уравненій, разсматриваемой совокупности послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15), разрѣшимы относительно величинъ

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

и даютъ ихъ значенія, которыя, совмѣстно съ данными функциями (13), опредѣляютъ касательное преобразование.

Такимъ образомъ, по даннымъ $n + 1$ функциямъ въ инволюціи, при помощи элементарныхъ операций дифференцированія и алгебраическаго рѣшенія линейныхъ уравненій, опредѣляются новыя n функций, которыя, совмѣстно съ данными функциями, удовлетворяютъ зависимостямъ, выраженнымъ равенствами (11) и (12).

Какъ эти послѣднія зависимости такъ и только что разрѣшенная задача разысканія упомянутыхъ функций представляютъ полную аналогію со свойствами канонической системы интеграловъ каноническихъ дифференціальныхъ уравненій и съ задачей разысканія общаго интеграла послѣдней системы по половинному числу ея интеграловъ въ инволюціи. Къ этимъ послѣднимъ вопросамъ намъ придется возвратиться на послѣдующихъ страницахъ нашего изслѣдованія.

Возьмемъ, на примѣръ, слѣдующія уравненія

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \quad x'_2 = p_2, \quad x'_3 = x_3, \\ z' &= z - (x_1 + x_2)p_2. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv x_1, \quad X_2 \equiv p_2, \quad X_3 \equiv x_3, \\ Z &\equiv z - (x_1 + x_2)p_2, \end{aligned}$$

при чемъ соотвѣтствующія условія (11) удовлетворяются тождественно. Въ настоящемъ случаѣ n послѣднихъ уравненій (14) и уравненія (15) образуютъ систему шести уравненій, изъ которыхъ три уничтожаются тождественно, а остальные три даютъ слѣдующія равенства

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + P_2 &= 0, \\ p_2 - p_1 + P_1 &= 0, \\ p_3 - P_3 &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому три остальные искомыя уравненія разсматриваемаго касательнаго преобразованія становятся

$$p'_1 = p_1 - p_2, \quad p'_2 = x_1 - x_2, \quad p'_3 = p_3.$$

4. Пусть имѣемъ m различныхъ функций, выраженныхъ въ прежней системѣ переменныхъ,

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (17)$$

$$r=1, 2, \dots, m.$$

Назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$F'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n),$$

$$r=1, 2, \dots, m,$$

значенія, которыя принимаютъ функции (17) въ новыхъ переменныхъ. Такимъ образомъ, на основаніи формулъ касательнаго преобразованія (3), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) =$$

$$= F'_r(X_1, X_2, \dots, X_n, Z, P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Поэтому, составляя скобки Вейлера для какой-либо пары функций F'_s и F'_σ , получаемъ, на основаніи извѣстныхъ формулъ ¹⁾, слѣдующее равенство

$$[F'_s, F'_\sigma] = \sum_i \sum_k D \left(\frac{F'_s}{x'_i}, \frac{F'_\sigma}{x'_k} \right) [X_i, X_k] + \sum_i D \left(\frac{F'_s}{x'_i}, \frac{F'_\sigma}{z'} \right) [X_i, Z]$$

$$+ \sum_i \sum_k D \left(\frac{F'_s}{x'_i}, \frac{F'_\sigma}{p'_k} \right) [X_i, P_k] + \sum_k D \left(\frac{F'_s}{z'}, \frac{F'_\sigma}{p'_k} \right) [Z, P_k] +$$

$$+ \sum_i \sum_k D \left(\frac{F'_s}{p'_i}, \frac{F'_\sigma}{p'_k} \right) [P_i, P_k],$$

гдѣ суммирование распространяется на всѣ различныя значенія s и σ , отъ 1 до n .

Въ силу свойствъ касательныхъ преобразованій, выраженныхъ условіями (11) и (12), послѣднее равенство становится

¹⁾ См. мое сочиненіе „Объ интегрированіи уравненій съ частными производными“.... стр. 40.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 276.

$$[F_s, F_\sigma] = \frac{1}{\sigma} [F'_s, F'_\sigma] \quad (18)$$

и показываетъ, что скобки Вейлера, составленныя для каждой пары данныхъ функций (17), обладают свойствами *инвариантности* по отношенію къ касательнымъ преобразованіямъ.

Полученное равенство приводитъ къ весьма важному заключенію, что *замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли преобразовывается, при помощи касательныхъ преобразованій, тоже въ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли; такимъ же образомъ нормальная система преобразовывается тоже въ нормальную систему.*

Возьмемъ слѣдующую замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной функции f по независимымъ переменнымъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$

$$[F_r, f] = 0, \quad \left. \begin{array}{l} r=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (19)$$

гдѣ всѣ функции F_r находятся между собой въ инволюціи. Преобразовываемъ послѣднюю систему къ новымъ переменнымъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n$, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3). Назовемъ соотвѣтственно черезъ F'_r и f' значенія функций F_r и f въ новыхъ переменныхъ. На основаніи предыдущаго, легко видѣть, что система уравненій (19) преобразовывается въ слѣдующую систему уравненій, видъ которой аналогиченъ предыдущему,

$$[F'_r, f'] = 0, \quad \left. \begin{array}{l} r=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Наконецъ, въ силу равенства (18)-аго, становится очевиднымъ, что *каждый интегралъ системы линейныхъ уравненій (19), будучи преобразованъ, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3), становится, въ новыхъ переменныхъ x'_s, z', p'_s , интеграломъ системы уравненій (20).* Поэтому, *система нѣсколькихъ интеграловъ въ инволюціи уравненій (19) представляетъ, въ указанныхъ новыхъ переменныхъ, тоже систему интеграловъ въ инволюціи преобразованныхъ уравненій (20).*

Предыдущія разсужденія приводятъ, наконецъ, къ слѣдующему заключенію:

Пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} r=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (21)$$

которую преобразовываемъ къ новымъ переменнымъ, по формуламъ касательныхъ преобразований (3). Въ такомъ случаѣ очевидно, что каждое полное интегральное собраніе данныхъ уравненій (21) преобразовывается, при помощи тѣхъ же формулъ касательнаго преобразованія, въ полное интегральное собраніе преобразованной системы производныхъ уравненій.

При этомъ однако слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что классъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли вообще измѣняется, при замѣнѣ переменныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразований. Въ самомъ дѣлѣ, классъ преобразованнаго интегральнаго собранія зависитъ не только отъ класса первоначальнаго собранія, но также и отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія.

Пусть имѣемъ, на примѣръ, уравненіе

$$p_1 + x_2(p_2 + p_3)^2 = 0. \quad (22)$$

Преобразовываемъ его по слѣдующимъ формуламъ касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = p_3, \quad z' = z - x_3 p_3,$$

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = x_3.$$

Разсматриваемое уравненіе становится

$$p'_1 + x'_2(p'_2 - x'_3)^2 = 0 \quad (23)$$

и имѣетъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа

$$z' = \frac{x'_2}{x'_1 - C_1} + x'_3(x'_2 + C_3) + C_3,$$

или полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса, составленное изъ уравненія (23) и трехъ слѣдующихъ

$$x'_1 - \frac{1}{p'_2 - x'_3} = C_1, \quad p'_3 - x'_2 = C_2, \quad z' - x'_2(p'_2 - x'_3) - x'_3 p'_3 = C_3.$$

Возвращаясь къ прежнимъ переменнымъ, приводимъ послѣднюю систему къ совокупности уравненій (22) и слѣдующихъ

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2, \quad z - x_2(p_2 + p_3) = C_3.$$

Послѣднія равенства опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3, \quad x_3 = x_2 + C_2.$$

Для втораго примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе

$$p_1 + \frac{(z - 2x_2 p_2) p_2}{x_1 p_3} + \frac{z - (x_2 + x_3) p_2}{x_1} = 0. \quad (24)$$

Послѣднее уравненіе, при помощи формулъ касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = p_2, \quad x'_3 = x_3, \quad z' = z - x_2 p_2, \quad p'_1 = p_1, \quad p'_2 = -x_2, \quad p'_3 = p_3,$$

приводится къ слѣдующему виду

$$p'_1 + \frac{(z' + x'_2 p'_2) x'_2}{x'_1 p'_3} + \frac{z' - x'_2 x'_3}{x'_1} = 0. \quad (25)$$

Полное интегральное собраніе нулевого класса послѣдняго уравненія представляется совокупностью уравненія (25) и трехъ слѣдующихъ

$$-x'_1 p'_3 = C_1, \quad x'_1 \left(1 + \frac{p'_3}{p'_2}\right) = C_2, \quad (x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3 - z') \frac{p'_2}{p'_3} = C_3, \quad (26)$$

которыя опредѣляютъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа уравненія (24)

$$z' = \frac{C_1 x'_2}{x'_1 - C_2} - \frac{C_1 x_3 + C_2 C_3}{x'_1} + C_3.$$

Обратная замѣна переменныхъ преобразовываетъ уравненіе (25) въ (24) и найденное полное интегральное собраніе нулевого класса въ собраніе перваго класса уравненія (24), представляемое совокупностью этого послѣдняго уравненія и трехъ слѣдующихъ,

$$-x_1 p_3 = C_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_2}\right) = C_2, \quad (z - x_3 p_3) \frac{x_2}{p_3} = C_3,$$

которыя опредѣляютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (24)

$$z = -\frac{C_1 x_3}{x_1} - \frac{C_2 C_3}{x_1} + C_3, \quad x_2 = \frac{C_1}{C_2 - x_1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, слѣдующую систему уравненій

$$p_1 + \frac{(z - x_4 p_4)^6}{p_3^2} = 0, \quad p_2 + \frac{x_4 p_4}{2x_2} = 0. \quad (27)$$

Формулы касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = -p_4, \quad z' = z - x_4 p_4, \\ p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3, \quad p'_4 = x_4,$$

приводятъ уравненія (27) къ слѣдующему виду

$$p'_1 + \frac{z'^6}{p_3'^2} = 0, \quad p'_2 - \frac{x'_4}{2x'_2} p'_4 = 0. \quad (28)$$

Эти послѣднія уравненія имѣютъ полный интеграль С. Ли перваго класса

$$z' = \frac{1}{C_3 - C_2 x'_3 - \frac{1}{C_2^2} x'_1}, \quad x'_4 = \frac{C_1}{\sqrt{x'_2}}.$$

Соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется совокупностью уравненій (28) и слѣдующихъ

$$x'_4 \sqrt{x'_2} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{p'_1}} = C_2, \quad \frac{1}{z'} + \frac{x'_1 p'_1}{z'^2} + \frac{z' x'_3}{\sqrt{p'_1}} = C_3.$$

Совершая обратную замѣну переменныхъ получаемъ данныя уравненія (27) и слѣдующія

$$-p_4 \sqrt{x_2} = C_1, \quad \frac{z - x_4 p_4}{\sqrt{p_1}} = C_2, \quad \frac{1}{z - x_4 p_4} + \frac{x_1 p_1}{(z - x_4 p_4)^2} + \\ + \frac{(z - x_4 p_4) x_3}{\sqrt{p_1}} = C_3,$$

представляющія полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса данныхъ уравненій (27). Результатъ исключенія, изъ послѣднихъ трехъ уравненій, величинъ p_1 и p_4 приводитъ къ полному интегралу Лагранжа системы (27)

$$z = -\frac{C_1 x_4}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{C_3 - \frac{x_1}{C_2^2} - C_2 x_3}.$$

Въ приведенныхъ примѣрахъ мы совершали касательныя преобразованія, чтобы указать, какъ видоизмѣняется классъ полныхъ интегральныхъ собраній, при преобразованіи переменныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій.

Само собою разумѣется, что приходится возвращаться къ разсмотрѣнному случаю преобразованія интегрального собранія всякій разъ, когда мы преобразовываемъ полный интеграль Лагранжа какого-либо уравненія съ частными производными перваго порядка. Дѣйствительно, пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе съ частными производными

$$F'(x'_1, x'_2, \dots x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots p'_n) = 0$$

и его полный интеграль Лагранжа

$$z' = V(x'_1, x'_2, \dots x'_n, C_1, C_2, \dots C_n).$$

Чтобы получить отсюда полный интеграль уравненія, въ которое преобразовывается данное уравненіе замѣной входящихъ въ него переменныхъ черезъ $x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n$, при помощи формулъ (3), мы преобразовываемъ къ новымъ переменнымъ не только данный интеграль изслѣдуемаго уравненія, нои его первыя производныя уравненія по переменнымъ $x'_1, x'_2, \dots x'_n$. Такимъ образомъ задача приводится къ преобразованію полного интегрального собранія S . Ли нулевого класса. Поэтому классъ того собранія, которое получается въ результатъ преобразованія переменныхъ, зависитъ отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія и вообще отличенъ отъ нулевого. Слѣдовательно, исходя изъ полного интеграла Лагранжа даннаго уравненія, мы не имѣемъ вообще возможности, при помощи касательныхъ преобразованій, найти полный интеграль Лагранжа преобразованнаго уравненія.

Съ другой стороны, какъ мы видимъ, въ послѣднемъ изъ приведенныхъ примѣровъ, касательныя преобразованія даютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ способъ получать интегралы классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, исходя изъ интегральныхъ собраній S . Ли. Въ этомъ отношеніи наилучшій примѣръ представляетъ извѣстное обобщенное уравненіе Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q) \quad (29)$$

гдѣ f нѣкоторая, какая угодно функція переменныхъ p и q . Вводя новыя переменныя, по формуламъ касательнаго преобразованія

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = z - xp - yq, \quad p' = -x, \quad q' = -y,$$

преобразовываемъ данное уравненіе къ слѣдующему виду, въ формѣ функціональной зависимости,

$$z' = f(x', y'). \quad (30)$$

Легко разрѣшить слѣдующимъ образомъ послѣднее равенство, рассматриваемое, съ точки зрѣнія C . Ли, также какъ производное уравненіе. Исключая значеніе дифференціала dz' ,

$$dz' = \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy',$$

изъ условія соединенности поверхностныхъ элементовъ

$$dz' = p' dx' + q' dy',$$

получаемъ равенство

$$(p' - \frac{\partial f}{\partial x'}) dx' + (q' - \frac{\partial f}{\partial y'}) dy' = 0.$$

Послѣднее равенство имѣетъ три различныхъ рѣшенія. Первое изъ нихъ слѣдующее

$$x' = C_1, \quad y' = C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 —двѣ произвольныя постоянныя величины. Второе рѣшеніе имѣетъ видъ

$$y' = \varphi(x').$$

$$p' - \frac{\partial f}{\partial x'} + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \varphi'(x') = 0,$$

гдѣ $\varphi(x')$ представляетъ произвольную функцію. Наконецъ, третье рѣшеніе представляется слѣдующимъ образомъ

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Соотвѣтственно послѣднимъ рѣшеніямъ, мы получаемъ три различныхъ рѣшенія преобразованнаго уравненія (30). Первое изъ выше найденныхъ

рѣшеній приводитъ къ полному рѣшенію второго класса уравненія (30)

$$z' = f(C_1, C_2), \quad x' = C_1, \quad y' = C_2.$$

Второе рѣшеніе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z' = f(x', \varphi(x')), \quad y' = \varphi(x'),$$

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \varphi'(x').$$

Если, напримѣръ, положить въ послѣднемъ рѣшеніи $\varphi(x') = C'x' + C''$, гдѣ C' , C'' —двѣ произвольныя постоянныя, то мы получаемъ полное рѣшеніе С. Ли перваго класса уравненія (30). Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) представляется въ видѣ

$$z' = f(x', y'), \quad p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Совершая обратную замѣну переменныхъ, мы находимъ, соотвѣтственно изъ приведеннаго выше перваго рѣшенія преобразованнаго уравненія, полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (29)

$$z = C_1x + C_2y + f(C_1, C_2).$$

Второе рѣшеніе уравненія (30) приводитъ къ общему интегралу уравненія (29)

$$z = xp + yq + f(p, q).$$

$$q = \varphi(p),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} + \left(y + \frac{\partial f}{\partial q} \right) \varphi'(p) = 0.$$

гдѣ p и q представляютъ переменныя параметры. Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) даетъ особенный интегралъ обобщеннаго уравненія Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

гдѣ p и q —переменныя параметры. Такимъ образомъ, какъ слѣдуетъ также изъ нашихъ предыдущихъ изслѣдованій, относительно существо-

ванія полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, обобщенное уравненіе Клеро не имѣтъ полныхъ интеграловъ, отличныхъ отъ нулевого класса, и всѣ интегральныя собранія различныхъ классовъ преобразованнаго уравненія (30) переходятъ, при помощи касательныхъ преобразованій, въ рѣшенія нулевого класса обобщеннаго уравненія Клеро.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ С. Ли не останавливается на сравненіи между собой преобразованныхъ интегральныхъ собраній, не различая ихъ по классамъ. Съ точки зрѣнія С. Ли, полныя интегральныя собранія различныхъ классовъ являются совершенно эквивалентными аналитическими элементами. Устанавливая однако въ нашемъ изслѣдованіи существенное различіе между интегралами Лагранжа и С. Ли, намъ приходится также принимать во вниманіе классы разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній въ обѣихъ системахъ переменныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. На это послѣднее обстоятельство я имѣлъ случай указывать въ своемъ сочиненіи „*Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*“ и въ двухъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ ¹⁾ „*Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer*“, по поводу такъ называемаго усовершенствованія С. Ли способа интегрированія Якоби—Майера уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется возвратиться къ этому послѣднему вопросу съ болѣе общей точки зрѣнія.

5. Гурса ²⁾ разсматриваетъ, какъ приложеніе теоріи касательныхъ преобразованій, извѣстный способъ А. И. Коркина интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи ³⁾. На послѣдующихъ строкахъ мы изложимъ эти сообщенія въ нѣсколько обобщенномъ видѣ.

Пусть имѣемъ *нормальную* систему разсматриваемыхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Возьмемъ полный интеграль первыхъ k уравненій послѣдней системы, гдѣ $k < m$. Соответствующее ему полное интегральное собраніе, представленное уравненіями въ инволюціи, составляется при помощи операцій

¹⁾ Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 26 juin et 3 juillet 1899.

²⁾ E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 302.

³⁾ А. И. Коркинъ.—*О совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка*. С.П.Б. 1867.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p. 14 60.

дифференцирования и алгебраических исключений (см. стр. 54—57). Предположимъ, что это послѣднее собраніе представляется слѣдующей системой уравненій въ инволюціи

$$\begin{aligned} F'_r(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_1, p_2, \dots p_n) &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots k, \\ \Phi_i(x_1, x_2, \dots x_n, z, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots p_n) &= C_i, \\ i &= 1, 2, \dots n-k+1, \end{aligned}$$

гдѣ всѣ C_i —произвольныя постоянныя, при чемъ классъ этого собранія можетъ быть нулевымъ или какимъ угодно, такъ какъ всѣ послѣдующія разсужденія прилагаются къ собраніямъ любого класса.

Принимая выраженія F'_r и Φ_i соотвѣтственно за функціи $X_1, X_2, \dots X_n, Z$, составляемъ формулы касательнаго преобразованія (см. н^о3 настоящей главы)

$$\begin{aligned} x'_r &= X_r, \quad z' = Z, \quad p'_s = P_s, \\ s &= 1, 2, \dots n. \end{aligned}$$

Преобразованія къ новымъ переменнымъ x'_s, z', p'_s уравненія (31) очевидно становятся

$$\begin{aligned} x'_r &= 0, \quad r = 1, 2, \dots k, \\ F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots p'_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots m-k. \end{aligned}$$

Такъ какъ система данныхъ уравненій (31) *нормальная*, то полученныя преобразованія уравненія представляютъ также *нормальную* систему. Поэтому скобки Вейлера

$$[x'_r, F'_{k+i}] \equiv -\frac{\partial F'_{k+i}}{\partial p'_r} \equiv 0,$$

должны уничтожаться тождественно для всѣхъ различныхъ значеній r , отъ 1 до k , и значеній i , отъ 1 до $m-k$.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ функціи F'_{k+i} не зависятъ отъ переменныхъ $p'_1, p'_2, \dots p'_k$, и преобразованная нормальная система уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots x'_n, z', p'_{k+1}, p'_{k+2}, \dots p'_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots m-k. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Такимъ образомъ система (31), составленная изъ m уравненій съ n частными производными, преобразовывается въ аналогичную систему (32),

число уравненій которой и частныхъ производныхъ—каждое меньше на k единицъ, сравнительно съ первоначальной системой. Продолжая повторять тѣ же самыя дѣйствія съ полученными уравненіями (32), приходимъ, наконецъ, къ одному дифференціальному уравненію. Такъ какъ интегрированіе одного уравненія проводится, на основаніи Якоби-Мафферовскаго способа, къ интегрированію системы уравненій, то изложенный способъ приводитъ въ результатъ интегрированіе данныхъ уравненій къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію.

Приведенный способъ изложенія обобщенной теоріи А. Н. Коркина даетъ мѣсто двумъ существеннымъ возраженіямъ:

Во-первыхъ, вслѣдствіе введенія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, становится неизвѣстнымъ классъ полного интегральнаго собранія, которое должно получаться въ результатъ выполненнаго интегрированія, т. е. вводится также неопредѣленность, относительно искомагаго рѣшенія, которая характеризуетъ всѣ способы интегрированія С. Ли.

Во-вторыхъ, приведенное изложеніе упускаетъ изъ виду одну особенность, которая является весьма существенной при нѣкоторыхъ приложеніяхъ способа интегрированія А. Н. Коркина. Дѣйствительно, этотъ послѣдній требуетъ, сравнительно съ другими приѣмами интегрированія частныхъ уравненій, наибольшаго числа операцій интегрированія. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ вопросахъ, которые находятся въ связи съ разысканіемъ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функций многихъ независимыхъ переменныхъ, какъ показали А. Н. Коркинъ¹⁾, его способъ интегрированія даетъ простое рѣшеніе рассматриваемой задачи.

Новое изложеніе рассматриваемой теоріи, которое мы дадимъ ниже, основывается также на касательныхъ преобразованіяхъ, при чемъ числа новыхъ и прежнихъ переменныхъ различны между собой. Поэтому необходимо предварительно остановиться на нѣсколькихъ теоретическихъ соображеніяхъ.

6. Пусть прежнія переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и новыя переменныя

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z, p'_1, p'_2, \dots, p'_m$$

¹⁾ Коркинъ.—О совокупности уравненій...

Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel (Mathematische Annalen. Bd. II, 1869, S. 13).

Н. Н. Салтыковъ.—Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи тѣлой, несвѣжаемой нити (Сообщенія Харьк. Математическаго Общ., т. VI).

связаны между собой зависимостями

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= X_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ z' &= Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ p'_s &= P_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$s=1, 2, \dots, m.$

Если между рассматриваемыми переменными существует равенство

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{s=1}^m p'_s dx'_s), \quad (34)$$

то обѣ системы переменныхъ опредѣляютъ собой касательное преобразование ¹⁾.

Предположимъ, что $m < n$. Такъ какъ наименьшее число уравненій рѣшенія уравненія (34) равняется $n + m + 2$, то, чтобы послѣднее равенство имѣло мѣсто, очевидно необходимо должны существовать, кромѣ $2m + 1$ уравненій (33), еще $n - m + 1$ зависимостей. Изъ нихъ $n - m$ связываютъ прежнія переменныя между собой, а послѣдняя зависимость опредѣляетъ черезъ нихъ значеніе переменной σ . Предположимъ, что эти зависимости выражаются слѣдующими уравненіями

$$\left. \begin{aligned} f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots, n - m. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\sigma = R(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

На основаніи свойствъ рѣшеній равенства (34), рассуждая аналогично тому, какъ мы это дѣлали въ н^о2 настоящей главы, мы заключаемъ:

Во-первыхъ, что *уравненія (35) образуютъ замкнутую систему, и во-вторыхъ, что существуютъ слѣдующія равенства*

$$\left. \begin{aligned} [X_i, X_k] &= 0, \quad [X_i, Z] = 0, \\ [X_i, P_k] &= \begin{cases} 0, & i \geq k, \\ -\frac{1}{\sigma}, & i = k, \end{cases} \\ [Z, P_k] &= -\frac{P_k}{\sigma}, \quad [P_i, P_k] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

¹⁾ Cp. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 325.

$$\left. \begin{aligned} [X_i, R] &= -\frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma, \\ [Z, R] &= 1 - \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma, \\ [P_i, R] &= \frac{\partial P_i}{\partial z} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

для всѣхъ различныхъ значений i и k , отъ 1 до n . При этомъ написанныя равенства выполняются, вообще, на основаніи уравненій (35).

Однако въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ равенства (36) имѣютъ мѣсто тождественно, аналогично тому случаю, когда числа новыхъ и прежнихъ переменныхъ равны между собой. Предположимъ, напримѣръ, что уравненія (35) зависятъ явно отъ величинъ

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-m}$$

и разрѣшимъ относительно послѣднихъ, такъ что слѣдующій функциональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m}}{p_1, p_2, \dots, p_{n-m}} \right) \neq 0.$$

Если функции X_s, Z, P_s не зависятъ отъ переменныхъ

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-m},$$

то становится очевиднымъ, что равенства первыхъ трехъ строкъ формулъ (36) должны удовлетворяться тождественно. Наконецъ, если функция R не зависитъ отъ тѣхъ же переменныхъ, то тогда и остальные равенства (36) тоже удовлетворяются тождественно.

Предположимъ, что, разрѣшивъ уравненія (33) и (35) относительно прежнихъ переменныхъ, получаемъ слѣдующія ихъ $n+m+1$ значений въ новыхъ переменныхъ и остальныхъ $n-m$ прежнихъ

$$\left. \begin{aligned} x_r &= X'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ z &= Z'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ p_s &= P'_s(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$r = n-m+1, n-m+2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m.$

На основаніи разсужденій $n^{\circ}4$ -аго настоящей главы, легко вывести слѣдующее заключеніе:

Если уравненія замкнутой или нормальной системы, будучи преобразованы къ новымъ переменнымъ, при помощи формулъ (37), не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-m} , то преобразованная къ новымъ переменнымъ система является также соответственно замкнутой или нормальной.

7. Пользуясь приведенными соображеніями, легко изложить теорію А. Н. Коркина. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Предположимъ, что первыя k изъ послѣднихъ уравненій образуютъ нормальную систему и разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_k , такъ что слѣдующій функциональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_k}{p_1, p_2, \dots, p_k} \right) \neq 0. \quad (39)$$

Напишемъ полный интеграль разсматриваемыхъ k уравненій

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}), \quad (40)$$

гдѣ величины $z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}$ обозначаютъ $n-k+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ выполняется условіе

$$D \left(\begin{aligned} &V, \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \\ &-\frac{z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}}{\partial x'_i} \end{aligned} \right) \neq 0. \quad (41)$$

Составляемъ уравненія, представляющія, совмѣстно съ (40)-ымъ, общее интегральное собраніе проинтегрированныхъ уравненій,

$$\left. \begin{aligned} p_s &= \frac{\partial V}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial V}{\partial x'_i} + \frac{\partial V}{\partial z'} p'_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-k, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

при чемъ z' разсматривается какъ функція остальныхъ произвольныхъ постоянныхъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}$, и выраженія p'_i обозначаютъ частныя про-

изводныя первого порядка функции z' соответственно по независимой перемѣнной x'_i , такъ что имѣеть мѣсто равенство

$$dz' = \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i.$$

Дифференцируя уравненіе (40), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial V}{\partial z'} dz' + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial V}{\partial x'_i} dx'_i.$$

Поэтому, если ввести обозначеніе

$$\sigma = - \frac{\partial V}{\partial z'}, \quad (43)$$

то становится очевиднымъ, что равенство

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i)$$

удовлетворяется тождественно, на основаніи уравненій (40), (42) и (43). т. е. послѣднія опредѣляютъ касательное преобразованіе между прежними перемѣнными

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и новыми перемѣнными величинами

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-k}.$$

На основаніи неравенства (41), уравненія (40) и (42) опредѣляютъ выраженія слѣдующихъ прежнихъ перемѣнныхъ

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n \quad (44)$$

въ новыхъ перемѣнныхъ и k прежнихъ

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Преобразовывая къ новымъ перемѣннымъ данныя уравненія (38), т. е. подставляя въ нихъ указанныя значенія перемѣнныхъ (44), замѣчаемъ, что первыя k уравненій (38) уничтожаются тождественно, такъ какъ значеніе (40)-ой функции z представляетъ ихъ интегралъ. вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ замѣтить, что эти k первыя уравненій (38) представляютъ.

въ силу условій (39) и (41), результатъ исключенія новыхъ переменныхъ изъ уравненія (40) и n первыхъ уравненій (42). Такимъ образомъ рассматриваемыя k уравненій являются въ настоящемъ случаѣ тѣми зависимостями между прежними переменными, которыя имѣютъ мѣсто въ формулахъ касательныхъ преобразованій, когда число новыхъ переменныхъ меньше числа прежнихъ. Наконецъ, предположимъ, что остальные $m - k$ уравненій (38) принимаютъ видъ

$$\left. \begin{aligned} F'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-k}, x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \\ r = k+1, k+2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

т. е. зависеть вообще отъ k прежнихъ переменныхъ.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно интегрируемости изслѣдуемыхъ уравненій (38). Но если предположить, что послѣднія имѣютъ интеграль, то въ такомъ случаѣ легко доказать, что уравненія (45) приводятся къ новой системѣ, уравненія которой не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть рѣшеніе данныхъ уравненій (38) представляется равенствомъ

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (46)$$

Въ такомъ случаѣ рѣшеніе преобразованной системы (45) получается какъ результатъ исключенія $n+1$ величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z$$

изъ системы $n+2$ уравненій (40), (46) и n слѣдующихъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе преобразованныхъ уравненій, какого-бы класса оно ни было, во всякомъ случаѣ не зависитъ отъ значеній величинъ x_1, x_2, \dots, x_k . Поэтому рѣшеніе системы (45) утождествляетъ ея уравненія при какихъ-угодно значеніяхъ x_1, x_2, \dots, x_k . Слѣдовательно, то же рѣшеніе утождествляетъ также уравненія

$$\frac{\partial F'_r}{\partial x_h} = 0, \frac{\partial^2 F'_r}{\partial x_h \partial x_l} = 0, \dots$$

которыя получаютъ дифференцированіемъ уравненій (45) по всѣмъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_k . Увеличивая такимъ образомъ число уравненій

системы (45)-ой прибавленіемъ ея указанныхъ производныхъ уравненій, мы получимъ въ результатѣ систему уравненій, не зависящихъ отъ прежнихъ переменныхъ. Если бы получилось число уравненій, которое больше $n - k + 1$, то въ такомъ случаѣ разсматриваемыя уравненія не имѣютъ интеграла. Если же число уравненій вновь полученной системы меньше $n - k + 1$, то, поступая съ ней какъ съ первоначальной системой, мы продолжимъ наши вычисления до тѣхъ поръ, пока не сведемъ задачу къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, или пока не убѣдимся, что данныя уравненія несовмѣстны.

Изложенный способъ разсужденія А. Н. Коркина представляетъ то преимущество, что не основывается на приведеніи данныхъ уравненій къ замкнутымъ системамъ и позволяетъ такимъ образомъ приступить къ интегрированію безъ предварительнаго вычисленія всѣхъ дополнительныхъ уравненій или неизвѣстныхъ коэффициентовъ и функций, которые, при извѣстныхъ задачахъ, входятъ въ данныя уравненія. Это послѣднее обстоятельство обуславливаетъ успѣхъ, съ которымъ примѣняется разсматриваемый способъ интегрированія въ указанныхъ выше вопросахъ (см. стр. 133).

Въ частномъ случаѣ, если данныя уравненія (38) образуютъ замкнутую систему, то въ такомъ случаѣ очевидно, что преобразованныя уравненія (45) приводятся къ $m - k$ различнымъ уравненіямъ, независимымъ отъ прежнихъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_k . Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, извѣстно, что уравненія (45) имѣютъ интегралъ, независимый отъ послѣднихъ переменныхъ, и, во-вторыхъ, число уравненій (45) не должно превосходить числа $m - k$, такъ какъ ихъ полный интегралъ долженъ заключать $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому единственное возможное заключеніе, которое остается сдѣлать, состоитъ въ томъ, что всѣ переменныя x_1, x_2, \dots, x_k исключаются изъ уравненій (45) и результатъ послѣдняго исключенія представляется совокупностью $m - k$ различныхъ уравненій въ новыхъ переменныхъ. Само собою разумѣется, что эти уравненія образуютъ *замкнутую систему*, такъ какъ по условію имѣютъ полный интегралъ съ $n - m + 1$ различными произвольными постоянными.

Наконецъ, если данныя уравненія (38) образуютъ *нормальную* систему и преобразованныя уравненія (45) не зависятъ отъ x_1, x_2, \dots, x_k , то очевидно, что эта система (45) также *нормальная*. Въ частномъ случаѣ, если $k = 1$, то въ своемъ изслѣдованіи А. Н. Коркинъ доказываетъ, что данныя уравненія, преобразованныя къ новымъ переменнымъ, не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ.

Итакъ, выполнивъ преобразованіе А. Н. Коркина, мы получаемъ систему уравненій, заключающую меньшее число переменныхъ, сравнительно съ данными уравненіями. Продолжая прежнія преобразованія, мы приходимъ, наконецъ, къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, и

тогда, для получения искомого интеграла, остается выполнить обратную замѣну переменныхъ. При этомъ необходимо отмѣтить то существенное обстоятельство, что обратная замѣна переменныхъ всегда приводитъ къ полному интегралу Лагранжа или къ полному интегральному собранію нулевого класса данныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, въ основу каждого преобразованія кладется общій интеграль Лагранжа. Хотя послѣдній и представляется совокупностью уравненій, заключающихъ вспомогательные параметры, которые принимаются за новыя независимыя переменныя, тѣмъ не менѣе результатъ исключенія послѣднихъ изъ рассматриваемой системы уравненій всегда приводитъ къ интегралу, представляемому однимъ уравненіемъ. Послѣднее обстоятельство находитъ теоретическое подтвержденіе въ извѣстной *теоремѣ Коши*, доказывающей существованіе общаго интеграла уравненій съ частными производными ¹⁾.

Въ своемъ изложеніи А. Н. Коркинъ совершаетъ каждое послѣдовательное преобразованіе, исходя изъ интеграла одного только уравненія, а затѣмъ преобразовываетъ къ новымъ переменнымъ всѣ остальные изслѣдуемыя уравненія. Что касается изложенныхъ выше соображеній, то они позволяютъ сократить число всѣхъ преобразованій, необходимыхъ для интегрированія, и приводятъ такимъ образомъ быстрее къ окончательному результату. Кромѣ того, приведенное изложеніе позволяетъ уменьшать число преобразовываемыхъ уравненій даже въ томъ случаѣ, когда каждое новое преобразованіе совершается какъ у А. Н. Коркина, при помощи интеграла одного только изъ рассматриваемыхъ уравненій. Дѣйствительно, при каждомъ послѣдовательномъ преобразованіи переменныхъ, нѣтъ надобности преобразовывать къ новымъ переменнымъ всѣ рассматриваемыя уравненія, но достаточно преобразовать только одно изъ нихъ или нѣсколько, съ тѣмъ чтобы принять ихъ полный интеграль за основаніе новаго преобразованія переменныхъ и т. д.

Проинтегрируемъ, напримѣръ, нормальную систему уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} &= 0, & p_2 - \frac{x_4}{x_2} p_4 &= 0, \\ p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Полный интеграль первыхъ двухъ уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: „Объ интегрированіи уравненій...“ стр. 45 и статью: „Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue“ (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXI).

$$z = x'_1 x_1 + \frac{x_2 x_3 x_4}{x'_1} + z',$$

гдѣ x'_1 и z' обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя величины.

Полагая $x_3 = x'_2$ и принимая x'_1 и x'_2 за новыя независимыя переменныя, а z' за новую неизвѣстную функцію, составляемъ формулы преобразованія къ новымъ переменнымъ, обозначая черезъ p'_1 , p'_2 новыя частныя производныя $\frac{\partial z'}{\partial x'_1}$ и $\frac{\partial z'}{\partial x'_2}$,

$$z = x'_1 x_1 + \frac{x_2 x_4 x'_2}{x'_1} + z',$$

$$p_1 = x'_1, \quad p_2 = \frac{x_4 x'_2}{x'_1},$$

$$p_3 = \frac{x_2 x_4}{x'_1} + p'_2, \quad p_4 = \frac{x_2 x'_2}{x'_1},$$

$$x_1 - \frac{x_2 x'_2 x_4}{x'^2_1} + p'_1 = 0.$$

Преобразованное къ новымъ переменнымъ послѣднее уравненіе (47) становится

$$p'_2 + \frac{x'_1}{x'_2} p'_1 = 0,$$

т. е. не зависитъ отъ прежнихъ переменныхъ. Полный интегралъ послѣдняго уравненія имѣетъ значеніе

$$z' = C_1 \frac{x'_1}{x'_2} + C_2,$$

гдѣ C_1 , C_2 —двѣ произвольныя постоянныя.

Обратная замѣна переменныхъ приводитъ къ слѣдующему полному интегралу данныхъ уравненій (47)

$$z = 2\sqrt{x_2 x_4 (x_1 x_3 + C_1)} + C_2.$$

ГЛАВА VI.

Теорія характеристикъ.

1. До сихъ поръ мы занимались изслѣдованіемъ общихъ положеній теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и производныхъ уравненій С. Ли. Что касается полныхъ интегральныхъ собраний С. Ли различныхъ классовъ, отличныхъ отъ нулевого, то мы видѣли, что они существуютъ только для уравненій опредѣленныхъ типовъ. Наше дальнѣйшее изслѣдованіе посвящается способамъ разысканія полныхъ интегральныхъ собраний. Какъ было выше показано, во II-ой главѣ, каждое полное интегральное собраніе С. Ли, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляется замкнутой системой $n+1$ уравненій, которая въ свою очередь вполне опредѣляется уравненіями геометрическаго мѣста соответствующаго интегральнаго собранія. Послѣднее геометрическое мѣсто выражается въ классической теоріи однимъ уравненіемъ, а въ теоріи С. Ли—нѣсколькими равенствами. Поэтому способы интегрированія разсматриваемыхъ уравненій приводятся къ разысканію, или послѣднихъ геометрическихъ мѣстъ, или опредѣляемыхъ ими интегральныхъ собраний непосредственно.

Изъ нашихъ изслѣдованій (см. стр. 66) вытекаетъ, что не всякое производное уравненіе С. Ли имѣетъ полные интегралы любого класса. Поэтому становится вполне понятнымъ, почему общіе способы интегрированія С. Ли отличаются неопредѣленностью въ томъ смыслѣ, что не даютъ возможности заранѣе установить классъ того интеграла, который долженъ получиться въ результатѣ производимыхъ вычисленій. Дѣйствительно, каждое рѣшеніе даннаго класса допускается только производными уравненіями опредѣленнаго типа. Такъ какъ, въ своихъ изслѣдованіяхъ, С. Ли не принималъ въ расчетъ всѣ эти соображенія, то естественно, что классъ получаемыхъ имъ рѣшеній является совершенно случайнымъ.

Намъ не представляется цѣлесообразнымъ сохранять послѣднюю точку зрѣнія С. Ли, которая однако проводится въ современныхъ трактатахъ теоріи уравненій съ частными производными, тѣмъ болѣе, что мы уже получили въ предыдущихъ главахъ рядъ результатовъ относи-

тельно существованія полныхъ рѣшеній С. Ли различныхъ классовъ. Намъ представляется также недостаточнымъ въ теоретическомъ, научномъ отношеніи удовлетвориться результатами С. Ли, послѣ того какъ мы установили простое аналитическое различіе между рассматриваемыми рѣшеніями различныхъ классовъ, выражаемое при помощи функціональных опредѣлителей и ихъ уничтожающихся миноровъ (см. стр. 44 и 50—51). Болѣе того, мы считаемъ невозможнымъ, послѣ всего сказаннаго, смѣшивать полные интегралы различныхъ классовъ, какъ это дѣлають другіе авторы, на что было уже указано на предыдущихъ страницахъ (см. стр. 35). Удовлетвориться рѣшеніемъ С. Ли, излагая теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій, равносильно признанію въ несостоятельности излагаемой теоріи давать искомые интегралы во всѣхъ различныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться, при приложеніи теоріи на практикѣ.

При разысканіи рассматриваемыхъ интеграловъ, представляются нѣсколько различныхъ случаевъ опредѣленія искомыхъ функцій, на основаніи различныхъ аналитическихъ элементовъ. Если извѣстно нѣсколько новыхъ уравненій, заключающихъ равное число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ и образующихъ замкнутую систему, совмѣстно съ данными уравненіями, или если извѣстно нѣсколько интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соответствующихъ даннымъ интегрируемымъ, то задача интегрированія послѣднихъ выполняется при помощи способа Якоби—Майера. Если извѣстные интегралы послѣднихъ линейныхъ уравненій не находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ задача интегрированія рассматриваемыхъ уравненій совершается при помощи рѣшенія такъ называемой задачи С. Ли. Наконецъ, если извѣстна полная система интеграловъ послѣднихъ упомянутыхъ линейныхъ уравненій, то задача разысканія интеграловъ данныхъ уравненій выполняется при помощи алгебраическихъ исключеній, на основаніи такъ называемой теоріи характеристикъ.

Эта теорія получила свое названіе, благодаря изслѣдованіямъ Монжа ¹⁾, который положилъ основаніе геометрическому способу изложенія задачи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Второе аналитическое рѣшеніе рассматриваемаго вопроса было дано Коши ²⁾, для разысканія общихъ интеграловъ послѣдующихъ уравненій. Получаемый отсюда способъ составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа равно и такъ называемый первый способъ Якоби ³⁾ представляютъ однако случаи исключенія, когда не получаются искомые ин-

¹⁾ Monge.—*Application de l'Analyse à la Géométrie.*

²⁾ Cauchy.—*Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques*, 1841, p. 238.

³⁾ *Journal Crelle*, t. XVII, S. 97, или *Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 59.

тегралы. Эти послѣдніе случаи были изслѣдованы Майеромъ, Бертра-номъ и Дарбу¹⁾. Почти одновременно С. Ли опубликовалъ также свои изслѣдованія, при чемъ избѣжалъ необходимости разсматривать упо-мянутые случаи исключенія, вводя понятія о своихъ интегральныхъ собраніяхъ.

Излагая теорію характеристикъ, на страницахъ *Mathematische Annalen*, Bd. IX²⁾, С. Ли приводитъ также доказательство существова-нія своихъ интеграловъ. Но такъ какъ С. Ли не различаетъ классовъ интегральныхъ собраній, то, съ развиваемою въ настоящемъ изслѣдова-ніи точки зрѣнія, указанное доказательство не представляетъ интереса, такъ какъ доказываетъ только существованіе системы интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ разсматриваемымъ производнымъ. Наконецъ, для симметричности вычисленій, С. Ли всѣ разсматриваемыя уравненія представляетъ въ видѣ однородныхъ. Впро-чемъ вычисленія, которыми мы будемъ пользоваться, являются настолько простыми, что намъ представляется излишнимъ придавать изслѣдуемымъ уравненіямъ какой либо спеціальныи видъ. тѣмъ болѣе, что, благодаря подобнымъ искусственнымъ преобразованіямъ, усложняются вычисленія, при переходѣ отъ общей теоріи къ приложеніямъ.

На предыдущихъ страницахъ мы въ достаточной мѣрѣ уже вы-яснили и установили нашу точку зрѣнія на сущность идей С. Ли. Послѣ того какъ извѣстенъ общій видъ всѣхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы даннаго класса, задача разысканія послѣднихъ, для насъ, не представляетъ болѣе интереса, съ точки зрѣнія общей теоріи интегрированія дифференціальныи уравненій. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сосредоточимъ наше вниманіе на разысканіи полныхъ ин-теграловъ Лагранжа.

Не смотря на господство въ наукѣ, въ послѣднее время, идей С. Ли, тѣмъ не менѣе послѣдній вопросъ классической теоріи дифференціаль-ныхъ уравненій не переставалъ привлекать вниманіе ученыхъ. Въ этомъ направленіи слѣдуетъ отмѣтить изслѣдованія Майера³⁾, Морера⁴⁾ и лек-

¹⁾ Mayer.—*Mathematische Annalen*, Bd. III, S. 435.

Bertrand.—*Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 641.

Darboux.—*Comptes rendus*, t. LXXIX, p. 1488; t. LXXX. p. 160; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1-re série, t. VIII, p. 219.

²⁾ S.S. 261—264.

³⁾ *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August Universität*, Göttingen 1873, p. 299.

Mathematische Annalen, Bd. VI, 1873, p. 192.

⁴⁾ *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti*, 2-e serie, vol. XVI, 1883, p. p. 637. 691.

ціи Е. Вебера по теоріи дифференціальнихъ уравненій съ частными производными ¹⁾).

Съ болѣе общей точки зрѣнія теорія характеристикъ разсматривается въ моихъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ ²⁾, въ сочиненіи: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, и въ мемуарѣ: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* ³⁾. Въ этихъ послѣднихъ изслѣдованіяхъ разсматриваемый вопросъ рѣшается для дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, представленныхъ въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ, или когда данныя уравненія разрѣшены относительно частныхъ производныхъ, или когда эти уравненія, не будучи разрѣшены относительно производныхъ, вмѣстѣ съ тѣмъ не зависятъ отъ неизвѣстной функціи z . На слѣдующихъ строкахъ распространяются предыдущія соображенія на системы уравненій общаго вида, какъ было мною указано въ запискѣ, 19 декабря 1900 г., *Société Mathématique de France*, въ Парижѣ, и затѣмъ опубликовано въ изданіяхъ того же Общества въ статьѣ: *Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction* ⁴⁾

2. Пусть имѣемъ систему m уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z; p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0. \quad (2)$$

Составляемъ соотвѣтствующую даннымъ уравненіямъ (1) замкнутую ⁵⁾ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной функціи f

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ *Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1900, S. S. 438, 468.

²⁾ *Comptes rendus*, 16 janvier et 24 juillet 1899.

³⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5-e série, t. V, 1899, p. 435.

⁴⁾ *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXIV, 1901, p. 86.

⁵⁾ См. стр. 55 настоящаго изслѣдованія.

Послѣднія уравненія называются *дифференціальными уравненіями характеристикъ*. При геометрическомъ изложеніи, выводъ ихъ совершается на основаніи геометрическихъ свойствъ разсматриваемой задачи интегрированіе. Что касается аналитическаго изложенія теоріи характеристикъ, то въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (3) являются непосредственнымъ слѣдствіемъ основной идеи такъ называемаго второго способа Якоби интегрированія разсматриваемыхъ уравненій ¹⁾. Тогда вся задача теоріи характеристикъ представляетъ ничто иное, какъ рѣшеніе послѣдняго изъ трехъ различныхъ, указанныхъ выше аналитическихъ вопросовъ, представляющихся при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Поэтому мы не станемъ останавливаться на вопросѣ о составленіи дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, а перейдемъ непосредственно къ вычисленію искомыхъ полныхъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій.

Предположимъ, что извѣстна полная система $2n - m + 1$ различныхъ интеграловъ уравненій (3), которая представляется слѣдующими функциями

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_{2n-2m+1}. \quad (4)$$

Задача разсматриваемой нами теоріи характеристикъ приводится къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Составить при помощи данныхъ функций (4) значенія переменныхъ

$$z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

въ функцияхъ независимыхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , при томъ такъ, чтобы послѣднія функции удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

и тождественно даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ (1).

Приравниваемъ m первыхъ функций (4) нулямъ, а всѣ остальные функции соотвѣтственно произвольнымъ постояннымъ величинамъ $C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}$, и получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_r,$$

$$r = 1, 2, \dots, 2n - 2m + 1.$$

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5-e série t. V p. 435).*

Вслѣдствіе условія, представленнаго неравенствомъ (2), послѣдняя система уравненій разрѣшима относительно переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Предположимъ, что опредѣляемые такимъ образомъ значенія ихъ представляются равенствами

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ x_{m+k} &= \varphi_k(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, s=1, 2, \dots, n.$

Составимъ, наконецъ, систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующую линейнымъ уравненіямъ (3), для которой уравненія (5) являются интегральными. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что нашъ опредѣлитель Δ выражается слѣдующимъ образомъ, въ явной формѣ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ соответственно черезъ

$$\Delta_i, \Delta_k, \Delta'_s$$

тѣ значенія, которыя принимаетъ послѣдній опредѣлитель Δ , при замѣнѣ въ немъ элементовъ i -аго столбца соответствующими частными производными функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_m,$$

взятыми соответственно по переменнымъ

$$z, p_{m+k}, x_s.$$

Разрѣшая уравненія (3) относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

получаемъ слѣдующую яковлевскую систему

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n-m} X_{m+k}^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_{s=1}^n P_s^i \frac{\partial f}{\partial x_s} + Z^i \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, m,$

коэффициенты которой имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_{m+k}^i \equiv -\frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

$$P_s^i \equiv \frac{\Delta_i^s + \Delta_i p_s}{\Delta},$$

$$Z^i \equiv -(p_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} p_{m+k}).$$

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ именно искомую систему

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m X_{m+k}^i dx_i, \\ dp_s &= \sum_{i=1}^m P_s^i dx_i, \\ dz &= \sum_{i=1}^m Z^i dx_i, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots, n-m, \quad s = 1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что значенія (5) утождествляютъ уравненія (6). Потому, на основаніи равенствъ (5), система $n-m$ первыхъ уравненій (6) и послѣднее изъ нихъ приводятъ къ слѣдующему тождеству

$$dz = \sum_{i=1}^m p_i dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} dx_{m+k}.$$

Отсюда вытекаетъ весьма важное заключеніе: Если возможно вывести изъ уравненій (5) значенія $z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$, въ функціяхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+k}} = p_{m+k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-m, \quad (7)$$

то должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

такъ какъ въ уравненіяхъ (5) переменныя величины x_1, x_2, \dots, x_m являются независимыми. Такимъ образомъ рассматриваемая задача приводится къ разысканію указанныхъ значений z и p_{m+k} , удовлетворяющихъ условіямъ (7). Для этого *необходимо и достаточно*, какъ доказано въ моихъ упомянутыхъ выше изслѣдованіяхъ¹⁾, исключить изъ перваго уравненія (5) $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ, при помощи $n-m$ уравненій $x_{m+k} = \varphi_k$, такимъ образомъ, чтобы уничтожались тождественно слѣдующія выраженія

$$U_c = \frac{\partial z}{\partial C} - \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C},$$

соотвѣтствующія всѣмъ исключаемымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ C . Если кромѣ того всѣ функции U_c , соотвѣтствующія всѣмъ $n-m+1$ остальнымъ произвольнымъ постояннымъ C , отличны отъ нуля, то въ такомъ случаѣ полученный результатъ исключенія представляеть *полный интегралъ* Лагранжа изслѣдуемой системы уравненій (1).

Само собою разумѣется, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ самый видъ уравненій (5) указываетъ непосредственно, какія произвольныя постоянныя слѣдуетъ исключить, чтобы получить искомый интегралъ. Что касается общаго случая то, для рѣшенія рассматриваемаго вопроса здѣсь слѣдуетъ изслѣдовать свойства функций U_c , которыя доказываютъ существованіе цѣлаго ряда произвольныхъ постоянныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ, необходимымъ для рѣшенія задачи, и представляютъ обобщеніе нашихъ предыдущихъ изслѣдованій.

3. Мы начнемъ съ вычисленія производныхъ по x_1, x_2, \dots, x_m функций U_c , которая зависитъ только отъ послѣднихъ переменныхъ, въ силу уравненій (5). Легко видѣть, что искомыя производныя приводятся къ слѣдующему виду.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i} - \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Объ интегрированіи уравненій..., стр. 80—82,

Mémoire sur l'intégration des équations..., p. 441—443.

Обозначимъ черезъ M_i^h миноръ опредѣлителя Δ , соответствующій его элементу $\frac{\partial F_h}{\partial p_i}$, со включеніемъ своего знака. Въ такомъ случаѣ получаемъ слѣдующія равенства

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_i}, & \Delta_i &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial z}, \\ \Delta_{ik} &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}, & \Delta_i^s &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial x_s}.\end{aligned}$$

Подставляя въ послѣднее выраженіе $\frac{\partial U_c}{\partial x_i}$, вмѣсто производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i},$$

соотвѣтственно ихъ значенія, изъ уравненій (6),

$$Z^i, X_{m+k}^i, P_{m+k}^i,$$

получаемъ, въ силу предыдущихъ выраженій опредѣлителей Δ , Δ_i , Δ_{ik} , Δ_i^s , слѣдующій результатъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_c}{\partial x_i} &= \frac{\partial p_i}{\partial C} + \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^m M_i^h \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) + \\ &+ \frac{\Delta_i}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}.\end{aligned}$$

Такъ какъ данныя уравненія (1) утождествляются на основаніи равенствъ (5), то имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial C} + \\ + \frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C} = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}$$

для каждой из произвольных постоянных C . Поэтому предыдущее выражение производных становится

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = -U_c \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \lg U_c = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до m . Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей j и i , отъ 1 до m , которыя показываютъ, что выражение

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i}{\Delta} dx_i$$

представляетъ точный дифференціалъ¹⁾, въ силу уравненій (5). Обозначимъ этотъ точный дифференціалъ черезъ dV . Вслѣдствіе предыдущихъ выраженій производныхъ $\lg U_c$, получаемъ, при помощи квадратуры, слѣдующее равенство

$$U_c = U_c^0 e^{-\int_{V_0}^V dV}, \quad (8)$$

гдѣ U_c^0 , V_0 обозначаютъ начальныя значенія функцій U_c и V .

Предыдущая зависимость упрощается, когда разсматриваемыя уравненія не зависятъ отъ переменной z . Какъ извѣстно, къ послѣднему случаю преобразовываются также и данныя уравненія (1) увеличеніемъ числа переменныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто z новую функцію v , всѣхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n, z , связанную съ ними слѣдующей зависимостью

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0.$$

¹⁾ Последнее выраженіе представляетъ обобщеніе изслѣдованнаго мною раньше точнаго дифференціала (см. *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 83.)

Обозначимъ черезъ q_* и q соответственно частныя производныя $\frac{\partial v}{\partial x_*}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$.

Въ силу данной зависимости, опредѣляющей новую функцію, прежнія производныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ новыя производныя

$$p_* = - \frac{q_*}{q}.$$

Преобразованныя уравненія (1) остаются также въ инволюціи, такъ какъ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства между скобками Пуассона, для преобразованныхъ уравненій, и скобками Вейлера, для данныхъ уравненій (1),

$$(F'_k, F'_h) = - \frac{1}{q} [F_k, F_h]',$$

при чемъ значки обозначаютъ результатъ подстановки, выполненной надъ выраженіями, при которыхъ поставлены эти значки.

Такъ какъ производная q отлична отъ нуля, то ограничивая наши изслѣдованія областью измѣненія переменныхъ, внутри которой частная производная q сохраняетъ конечное значеніе, заключаемъ изъ предыдущаго равенства, что условія инволюціи данныхъ уравненій (1) влекутъ за собой условія инволюціи преобразованныхъ уравненій. Такимъ образомъ система уравненій въ инволюціи (1) преобразовывается въ новую систему уравненій въ инволюціи, которая не заключаетъ болѣе зависимой переменной величины.

Для послѣднихъ уравненій очевидно формула (8) принимаетъ слѣдующій видъ

$$U_c = U_c^0,$$

гдѣ U_c^0 обозначаетъ начальное значеніе изслѣдуемой функціи U_c .

Мы ограничимъ наши изслѣдованія областью измѣненія переменныхъ величинъ, внутри которой интегралъ дифференціала dV сохраняетъ конечную опредѣленную величину. Такъ какъ, при этомъ условіи, выраженіе $e^{-\int_{v_0}^v dv}$ никогда не можетъ обратиться въ нуль, то, въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ переменныхъ, функціи U_c обращаются въ нуль или отличны отъ нуля одновременно со своими начальными значеніями U_c^0 . Такимъ образомъ задача составленія полныхъ интеграловъ данныхъ уравненій (1) находится въ непосредственной зависимости отъ значенія выраженій U_c^0 .

4. Чтобы удовлетворить всѣмъ указаннымъ условіямъ, примемъ въ разсматриваемомъ интегралѣ (5) за произвольныя постоянныя величины начальныя значенія a_i , b_i и b соответственно слѣдующихъ выраженій

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z = \sum_{k=1}^{n-m} x_{m+k} p_{m+k}.$$

Пусть, въ этомъ предположеніи, уравненія (5) приводятся къ виду

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \dots, \dots, b_{n-m}), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \dots, \dots, b_{n-m}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что $n-m$ уравненій, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно величинъ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} . Кромѣ того имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$U_{a_k}^0 = 0, \quad U_{b_k}^0 = a_k, \quad U_b^0 = 1,$$

$k=1, 2, \dots, n-m.$

Слѣдовательно, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} изъ перваго уравненія (9), на основаніи слѣдующихъ за нимъ $n-m$ уравненій, представляетъ искомый полный интеграль ¹⁾ данной системы (1).

Предположимъ, во-вторыхъ, что въ уравненіяхъ (9) постоянная b обозначаетъ начальное значеніе переменнѣй z , т. е.

$$b = z^0,$$

и что $n-m$ уравненій (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} . Въ такомъ случаѣ очевидно, что результатъ исключенія, изъ перваго уравненія (9), ихъ значеній, опредѣленныхъ послѣдними уравненіями, представляетъ также искомый полный интеграль.

Пусть, наконецъ, въ уравненіяхъ (9) постоянная b имѣетъ слѣдующее значеніе

$$b = z^0 - \sum_k a_k b_k,$$

гдѣ суммирование распространяется на показатели всѣхъ тѣхъ постоянныхъ b_k , относительно которыхъ разрѣшимы $n-m$ уравненій системы (9), отъ второго до $n-m+1$ включительно. Въ такомъ случаѣ оче-

¹⁾ Ср. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи...* стр. 85—86.

видно, что результат исключения изъ перваго уравненія (9) указанныхъ значений b_k и всѣхъ a_i , для которыхъ $i \geq k$, представляеть также искомый полный интеграль.

5. Аналогично разысканію полныхъ интеграловъ изслѣдуемой системы уравненій (1), легко вывести также законъ составленія ихъ общаго интеграла. Представимъ интегральныя уравненія (5) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0, z^0, p_{m+1}^0, \dots, p_n^0), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \dots, \dots, p_n^0), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \dots, \dots, p_n^0), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Предположимъ далѣе, что произвольныя постоянныя величины x_{m+k}^0 , z , p_{m+k}^0 связаны между собой слѣдующими зависимостями

$$\left. \begin{aligned} z^0 &= \Theta_0, \quad p_{m+k}^0 = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x_{m+k}^0}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$k=1, 2, \dots, n-m,$

гдѣ Θ_0 обозначаетъ начальное значеніе функцій $\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ ея переменныхъ $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Кроме того необходимо должно удовлетворяться также условіе, чтобы опредѣляемыя формулами (11) значенія $z^0, p_{m+1}^0, p_{m+2}^0, \dots, p_n^0$ лежали внутри разсматриваемой нами области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ.

Уравненія (10), въ силу значеній (11), становятся

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi'(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0), \\ x_{m+k} &= \Psi'_k(x_1, x_2, \dots, \dots, x_n^0), \\ p_s &= \Phi'_s(x_1, \dots, \dots, x_n^0), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что $n-m$ уравненій послѣдней системы, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно постоянныхъ величинъ $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$, такъ какъ функціи Ψ'_k принимаютъ послѣднія значенія для значеній $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ независимыхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m , и, слѣдовательно, функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{\Psi'_1}{x_{m+1}^0}, \frac{\Psi'_2}{x_{m+2}^0}, \dots, \frac{\Psi'_{n-m}}{x_n^0} \right),$$

для послѣднихъ начальныхъ значеній, становится равнымъ единицѣ. Наконецъ, всѣ функціи

$$U_{m+i}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m,$$

уничтожаются тождественно, въ силу уравненій (11). Поэтому исключая $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$ изъ перваго уравненія (12), при помощи $n-m$ послѣдующихъ за нимъ уравненій, мы получаемъ рѣшеніе данной системы (1).

Легко убѣдиться, что полученное рѣшеніе представляетъ *общій интегралъ Коши*. Обозначимъ, въ самомъ дѣлѣ, черезъ

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

значеніе функціи θ , для начальныхъ значеній $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m . Въ такомъ случаѣ очевидно, что, для послѣднихъ начальныхъ значеній, функція z и ея частныя производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

принимаютъ соотвѣтственно значенія функціи θ и ея частныхъ производныхъ по $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial x_n}.$$

Такимъ образомъ полученное рѣшеніе представляетъ дѣйствительно *общій интегралъ Коши*.

ГЛАВА VII.

Интегралы дифференциальных уравнений характеристикъ и каноническихъ уравнений. Усовершенствованный С. Ли способъ Якоби-Майера интегрированія уравнений съ частными производными.

1. Каноническія дифференціальныя уравненія обыкновенныя и въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ частный случай дифференціальныхъ уравнений характеристикъ, соотвѣствующихъ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, представленнымъ въ видѣ, разрѣшенномъ относительно частныхъ производныхъ. Поэтому теорія дифференциальныхъ уравнений характеристикъ представляетъ полную аналогію съ теоріей каноническихъ уравнений. Какъ хорошо извѣстно, существуетъ тѣсная взаимная зависимость между задачами интегрированія дифференциальныхъ уравнений съ частными производными перваго порядка и соотвѣствующими дифференціальными уравненіями характеристикъ¹⁾. Въ предыдущей главѣ мы занимались вопросомъ о составленіи полного интеграла дифференциальныхъ уравнений съ частными производными, исходя изъ общаго интеграла дифференциальныхъ уравнений характеристикъ. Въ настоящей главѣ мы имѣемъ въ виду привести нѣсколько соображеній по поводу обратной задачи составленія общаго интеграла дифференциальныхъ уравнений характеристикъ, послѣ того какъ проинтегрировано соотвѣствующее уравненіе съ частными производными. Съ рѣшеніемъ этой послѣдней задачи также тѣсно связаны имена Гамильтона, Якоби и Лиувилля, которые подошли, независимо другъ отъ друга и съ различныхъ точекъ зрѣнія, къ рѣшенію разсматриваемой задачи, какъ объ этомъ можно судить, сопоставляя сочиненія этихъ знаменитыхъ геометровъ.

Всѣ первоначальные труды ихъ относятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ динамики. Первыми, по времени своего опубликованія, являются изслѣдованіе Гамильтона: *On a general method in dynamics*²⁾ и письмо Якоби Парижской Академіи Наукъ: *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps*³⁾.

1) См. мои изслѣдованія: *Объ интегрированіи уравнений съ частными производными...*, *Mémoire sur l'intégration des équations...* (*Journal Jordan*, 1899), *Sur les théorèmes de Jacobi et Liouville* (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1903).

2) *Philosophical Transactions*, 1834—1835.

3) *Comptes rendus*, t. III, p. 59—61.

Jacobi.—*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 33.

Въ указанномъ изслѣдованіи Гамильтонъ выражаетъ общій интегралъ системы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій при помощи полного интеграла соотвѣтствующаго уравненія съ частными производными, при чемъ произвольными постоянными служатъ начальныя значенія переменныхъ. Что касается упомянутаго письма Якоби, то онъ показываетъ въ немъ, какъ, при помощи дифференцированія, составляется общій интегралъ канонической системы дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости, для которой извѣстны интегралъ живой силы и второй интегралъ, независимый отъ времени. Въ своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ ¹⁾ Якоби развилъ точку зрѣнія Гамильтона, принимая произвольныя величины, не представляющія начальныхъ значеній переменныхъ, за постоянныя интегрированія и распространяя рассматриваемую теорію на одно уравненіе съ частными производными общаго вида. Затѣмъ въ 1853 году Лиувиль опубликовалъ свою замѣтку ²⁾: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853*. Сущность послѣдней представляетъ распространеніе перваго вышеуказаннаго предложенія Якоби на каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій общаго вида. Въ этой статьѣ Лиувиль показываетъ, какъ составляется общій интегралъ обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, когда извѣстна половина всѣхъ интеграловъ, при условіи, что послѣдніе находятся въ инволюціи. Кромѣ того Лиувиль дополняетъ свою замѣтку весьма цѣннымъ замѣчаніемъ относительно того случая, когда данныя интегралы рассматриваемой канонической системы неразрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ одного и того же класса. При этомъ Лиувиль указываетъ, что, въ своихъ лекціяхъ въ *Collège de France*, онъ изслѣдовалъ послѣдній случай во всей его общности. Болѣе подробное разсмотрѣніе этого послѣдняго случая находится въ диссертациіи Лафова ³⁾. Наконецъ, мы считаемъ необходимымъ поставить въ тѣсную связь съ послѣднимъ вопросомъ изслѣдованія Майера, Бертрана и Дарбу, упомянутыя нами выше, при изложеніи теоріи характеристикъ и къ которымъ намъ придется еще разъ возвратиться, устанавливая ихъ взаимное соотношеніе съ теоріей полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

¹⁾ Jacobi.—*Ueber die Reduction der integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer zahl Variabeln auf die integration eines einzigen systemes gewöhnlicher Differenzialgleichungen* (Gesammelte Werke, Bd. IV. S. 57).

Jacobi.—*Vorlesungen über Dynamik*. Zweite, revidirte Ausgabe. Berlin, 1881. Zwanzigste Vorlesung, S. 157.

²⁾ *Journal Liouville*, t. XX, 1853, p. 137.

³⁾ Lafon, A.—*Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*. Thèse. Paris 1851.

Что касается двухъ различныхъ точекъ отправленія, которыя мы здѣсь отмѣтили, при составленіи общаго интеграла каноническихъ дифференціальныхъ уравненій, то оба разсматриваемыхъ предложенія Гамильтона-Якоби и Якоби-Лиувилля не представляютъ существеннаго различія. Въ самомъ дѣлѣ, первая теорія исходитъ изъ полнаго интеграла уравненія съ частными производными, тогда какъ Лиувиль принимаетъ за основаніе интегралы въ инволюціи соотвѣтствующей канонической системы, число которыхъ равно порядку послѣдней. Легко видѣть однако, что какъ послѣдніе интегралы такъ и полный интегралъ соотвѣтствующаго частнаго уравненія представляютъ эквивалентные элементы, въ смыслѣ интегрированія послѣдняго уравненія. Кромѣ того мы установимъ далѣе такое же аналогичное соотвѣтствіе между отмѣченными выше частнымъ случаемъ Лиувилля и полными интегралами С. Ли.

2. Мы начнемъ съ изложенія новаго, весьма простаго доказательства разсматриваемыхъ предложеній о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Всѣ хорошо извѣстныя доказательства послѣднихъ предложеній представляютъ непосредственную повѣрку формулъ, видъ которыхъ дается предварительно. Легко однако иначе поставить вопросъ, задавшись цѣлью вычислить искомыя интегралы, не предполагая напередъ извѣстнымъ ихъ видъ.

Пусть имѣемъ слѣдующее уравненіе

$$p + H(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (1)$$

гдѣ переменныя p, p_1, p_2, \dots, p_n обозначаютъ частныя производныя перваго порядка функціи z соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ t, x_1, x_2, \dots, x_n .

Составляемъ соотвѣтствующую каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Предположимъ, что полный интегралъ уравненія (1) представляется уравненіемъ

$$z = V(t, x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n) + b, \quad (3)$$

гдѣ b_1, b_2, \dots, b_n, b обозначаютъ $n + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \quad (4)$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, уравненія

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

разрѣшмы относительно произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_n и приводятъ къ n различнымъ интеграламъ въ инволюціи конической системы (2)

$$\left. \begin{aligned} F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= b_i, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обратно эти послѣдніе интегралы разрѣшмы очевидно относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n .

Такимъ образомъ, благодаря извѣстному полному интегралу частного уравненія (1), становятся извѣстными n интеграловъ канонической системы (2). Поэтому задача интегрированія послѣдней приводится къ составленію n различныхъ дифференціальныхъ зависимостей, интегрированіе которыхъ приводило бы къ n остальнымъ искомымъ интеграламъ. Съ этою цѣлью составляемъ тождество

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0,$$

которое получается изъ данного уравненія (1), при помощи подстановки его рѣшенія (3).

Дифференцируя послѣднее тождество по b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial b_s} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n.$$

Въ силу уравненій интегрируемой системы (2), послѣднія тождества преобразовываются въ систему n слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n.$

Какъ легко видѣть, первыя части послѣднихъ уравненій представляють точныя производныя, и мы приводимъ разсматриваемыя уравненія къ слѣдующему виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Интегрирование послѣднихъ уравненій даетъ искомыя интегральныя уравненія изслѣдуемой канонической системы (2)

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n обозначаютъ n произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Легко видѣть, что получаемые отсюда интегралы различны. Это слѣдуетъ изъ того, что послѣднія уравненія не зависятъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса и разрѣшмы относительно переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , вслѣдствіе введеннаго предположенія о неравенствѣ нулю определителя (4).

Въ изложенномъ сейчасъ доказательствѣ мы исходили изъ полного интеграла уравненія (1). Мы дадимъ еще второй способъ разысканія общаго интеграла канонической системы (2), принимая за основаніе ея n интеграловъ въ инволюціи (5). Съ этою цѣлью начнемъ съ разсмотрѣнія свойствъ искомыхъ интеграловъ.

Замѣтимъ прежде всего, что функціи

$$p + H, F_1, F_2, \dots, F_n \quad (6)$$

находятся въ инволюціи. Поэтому слѣдующія $n + 1$ уравненій съ частными производными функціи f

$$\begin{aligned} (p + H, f) &= 0, \\ (F_i, f) &= \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \\ 1, & i = s, \end{cases} \end{aligned}$$

образуютъ нормальную систему, допускающую n различныхъ, отличныхъ отъ функцій (6) интеграловъ, которые обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда убѣждаемся также въ существованіи *n* слѣдующихъ интеграловъ канонической системы (2)

$$f_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_s, \\ s = 1, 2, \dots, n,$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Каждый изъ этихъ интеграловъ находится въ союзѣ (*conjugue*) съ однимъ изъ интеграловъ (5) и въ инволюціи съ остальными изъ нихъ.

Убѣдившись въ существованіи послѣднихъ интеграловъ, легко ихъ вычислить, исходя изъ того, что каждая функція f_s опредѣляется уравненіями

$$\left. \begin{aligned} (p + H, f_s) &= 0, \\ (F_i, f_s) &= \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \\ 1, & i = s. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, интегралы (5) разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то функциональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_n}{p_1, p_2, \dots, p_n} \right) \quad (8)$$

долженъ быть отличнымъ отъ нуля. Преобразовываемъ уравненія (7) къ новымъ переменнымъ, принимая b_1, b_2, \dots, b_n за новыя переменныя вмѣсто p_1, p_2, \dots, p_n , и обозначимъ черезъ θ_s значеніе преобразованной функціи f_s . Въ силу свойствъ функцій (6), преобразованная система уравненій (7) становится

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Съ другой стороны значенія переменныхъ p, p_1, p_2, \dots, p_n , опредѣляемые уравненіями (1) и (5) какъ функціи величинъ

$$t, x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n,$$

утождествляютъ эти послѣднія уравненія. Дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества по величинамъ b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая послѣднія тождества соответственно изъ предыдущихъ, получаемъ тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до n . Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю определителя (8), вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до n . Такъ какъ опредѣляемые уравненіями (1) и (5) значенія переменныхъ p, p_1, p_2, \dots, p_n удовлетворяютъ попарно условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_r},$$

то, дифференцируя послѣднія по b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ новыя условія которыя показываютъ, что уравненія (9) интегрируемы. Поэтому функции θ_s опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial b_s} dx_n \right),$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительные произвольныя постоянныя величины.

Какъ легко видѣть, найденныя значенія функцій θ выражаются также слѣдующимъ образомъ, при помощи полного интеграла (3).

$$\theta_s = \frac{\partial V}{\partial b_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы получить отсюда значенія функцій f_s , остается совершить обратное преобразование переменныхъ, замѣнивъ величины b_1, b_2, \dots, b_n соответственно ихъ функціональными значеніями F_1, F_2, \dots, F_n . Наконецъ, только что изложенное доказательство становится болѣе простымъ. вслѣдствіе симметричности вычисленій, если за исходное принять слѣдующее дифференціальное уравненіе общаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Соотвѣтствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ становятся

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Пусть имѣемъ n слѣдующихъ различныхъ интеграловъ въ инволюціи послѣдней системы

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b_i, \\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

гдѣ F_0, b_0 условно обозначаютъ значенія F, b и $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Уравненія, служащія для опредѣленія остальныхъ искомыхъ $n-1$ интеграловъ f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , принимаютъ видъ

$$(F_i, f_s) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, 2, \dots, s-1, \quad s+1, \dots, n-1, \\ 1, & i = s, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Предполагая существованіе слѣдующаго неравенства

$$D \left(\frac{F, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}}{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} \right) \geq 0,$$

принимая величины $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ за новыя переменныя, вмѣсто p_1, p_2, \dots, p_n . Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ различнымъ системамъ слѣдующихъ равенствъ

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая равенства второй строки соответственно изъ равенствъ первой строки, получаемъ слѣдующія уравненія

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$

для всѣхъ различныхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Въ силу неравенства нулю предыдущаго определителя, получаемъ новыя уравненія

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s},$$

$k = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, n-1,$

которыя и опредѣляютъ искомыя интегралы при помощи квадратуръ.

3. Последнее доказательство распространяется также на случай, отмѣченный Пувиллемъ, когда извѣстные интегралы (5) канонической системы (2) разрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ различныхъ классовъ, но при этомъ различныхъ значковъ. Такъ предположимъ, напримѣръ, что уравненія (5) разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, \quad x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n,$$

такъ что слѣдующій функциональный определитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m}, F_{n-m+1}, \dots, F_n}{p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n} \right)$$

отличенъ отъ нуля. Возвращаясь къ уравненіямъ (7), опредѣляющимъ искомыя функціи f_s , вводимъ b_1, b_2, \dots, b_n какъ новыя переменныя вмѣсто величинъ $p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n$. Преобразованныя уравненія (7) становятся

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} &= \begin{cases} 0, & i \geq s, \\ 1, & i = s. \end{cases} \end{aligned}$$

Кромѣ того мы имѣемъ еще рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} &= \begin{cases} 0, & i \geq s, \\ 1, & i = s. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) - \\ - \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} \right) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) - \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} \right) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній s , отъ 1 до n . Вслѣдствіе неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, послѣдняя система приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = - \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s}, \\ k=1, 2, \dots, n-m, \quad r=1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до n .

Какъ извѣстно изъ теоріи касательныхъ преобразованій, система уравненій (1) и (5) остается также въ инволюціи, если каноническія переменныя подраздѣлить на два класса, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одной изъ двухъ слѣдующихъ строкъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, -p_{n-m+1}, -p_{n-m+2}, \dots, -p_n, \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что послѣднія написанныя уравненія, служащія для опредѣленія функцій θ_s , образуютъ интегрируемую систему. Это заключеніе, независимо отъ теории касательныхъ преобразованій, слѣдуетъ также непосредственно изъ самаго факта существованія функцій θ_s , доказаннаго выше для соответствующихъ имъ значеній функцій f_s . Такимъ образомъ искомыя функціи опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_{n-m}}{\partial b_s} dx_{n-m} - \right. \\ \left. - \frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial b_s} dp_{n-m+1} - \dots - \frac{\partial x_n}{\partial b_s} dp_n \right), \\ s = 1, 2, \dots, n.$$

гдѣ не принимаются въ расчетъ дополнительные произвольныя постоянныя величины.

Легко представить послѣднія выраженія при помощи одной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрируемъ точный дифференціалъ

$$dz = p dt + p_1 dx_1 + \dots + p_{n-m} dx_{n-m} - x_{n-m+1} dp_{n-m+1} - \dots - x_n dp_n,$$

гдѣ $p, p_1, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n$ обозначаютъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5). Напишемъ интегралъ послѣдняго дифференціала въ слѣдующемъ видѣ

$$z = U(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, p_{n-m+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_n) + b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ функціи θ_s выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\theta_s = \frac{\partial U}{\partial b_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому искомыя интегральныя уравненія канонической системы (2) становятся

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую каноническую систему третьяго порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$i=1, 2, 3,$

соответствующую частному дифференциальному уравнению

$$p + H = 0,$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H = \frac{x_2 x_3 - x_1}{t} p_1 + \frac{x_1 x_3}{t} \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{x_3^2}{t} \frac{p_1 p_3}{p_2}.$$

Разсматриваемая каноническая система имѣетъ три интеграла въ инволюціи

$$\frac{tp_2}{p_1} = b_1, \quad t(1 - \frac{p_2}{x_3 p_1}) = b_2, \quad \frac{tp_2^2}{x_3 p_1} = b_3.$$

Послѣдніе, совмѣстно съ нашимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, опредѣляютъ значенія переменныхъ p , p_1 , p_2 , x_3 слѣдующимъ образомъ

$$p = -\frac{b_1^2 p_3 - b_3(b_1 x_2 + b_2 x_1)}{b_1(t - b_2)^2},$$

$$p_1 = \frac{b_3 t}{b_1(t - b_2)}, \quad p_2 = \frac{b_3}{t - b_2}, \quad x_3 = \frac{b_1}{t - b_2}.$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, функція U получаетъ значеніе

$$U = \frac{b_3(b_1 x_2 + tx_1) - b_1^2 p_3}{b_1(t - b_2)} + b.$$

Поэтому слѣдующія три уравненія

$$\frac{\partial U}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U}{\partial b_3} = a_3$$

опредѣляютъ искомыя три интеграла интегрируемой канонической системы

$$-(x_1 p_1 + x_3 p_3) \frac{p_1}{tp_2} = a_1,$$

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3) \frac{x_3 p_1}{tp_2} = a_2,$$

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2) \frac{x_3 p_1}{tp_2^2} = a_3.$$

Если принять за исходные интегралы нашей канонической системы первые два данных интеграла и послѣдній изъ трехъ только что полученныхъ, которые образуютъ совместно систему трехъ уравненій въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно переменныхъ p_1, x_2, x_3 , то соответствующее значеніе *характеристической функции* становится

$$U' = \left(\frac{1}{b_1} t x_1 - a_3 t + b_2 a_3 \right) p_2 - \frac{b_1 p_3}{t - b_2}.$$

Въ такомъ случаѣ три искомые интеграла опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial U'}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U'}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U'}{\partial a_3} = b_3,$$

которые представляютъ остальные три приведенные уже выше интеграла изслѣдуемой канонической системы.

4. Всѣ приведенныя доказательства распространяются весьма легко на системы уравненій съ частными производными и на соответствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ.

Начнемъ съ разсмотрѣнія слѣдующей нормальной системы m дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_i + H_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad (m < n). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Составляемъ соответствующую послѣднимъ каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференциалахъ

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ k &= 1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пусть полный интегралъ системы (10) представляется равенствомъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, b$ обозначаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \geq 0. \quad (12)$$

Какъ легко видѣть, производныя уравненія

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-m,$$

опредѣляютъ $n-m$ различныхъ интеграловъ канонической системы (11).
Ея остальные $n-m$ интеграловъ получаются слѣдующимъ образомъ.

Дифференцируя по всѣмъ величинамъ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} тождества

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + H_i \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m.$$

Умножая послѣднія уравненія соответственно на dx_i и складывая результаты, соответствующіе всѣмъ различнымъ значкамъ i , отъ 1 до m , получаемъ $n-m$ тождествъ

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-m.$$

При помощи послѣднихъ тождествъ, первыя $n-m$ уравненій (11) преобразовываются въ слѣдующія дифференціальныя уравненія

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-m,$$

лѣвыя части которыхъ представляютъ точные дифференціалы

$$d \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n-m.$$

Интегрируя послѣднія, находимъ искомыя интегральныя уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n-m,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Полученныя уравненія разрѣшимъ относительно $n-m$ переменныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, вслѣдствіе неравенства (12), и опредѣляютъ такимъ образомъ систему $n-m$ новыхъ различныхъ интеграловъ канонической системы (11), отличныхъ отъ прежнихъ, указанныхъ выше интеграловъ.

Распространимъ послѣднее доказательство на замкнутую систему уравненій, зависящихъ явно отъ функциональной переменной величины z ,

$$p_i + H_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m, \quad (m < n), \end{array} \right\} \quad (13)$$

которыя удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ ¹⁾

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_i} - \frac{\partial H_h}{\partial z} H_i - \frac{\partial H_i}{\partial x_h} + \frac{\partial H_i}{\partial z} H_h + [H_h, H_h] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и i , отъ 1 до m .

Составляемъ соответствующую обобщенную каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференциалахъ

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ dz &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{r=1}^{n-m} p_{m+r} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} - H_i \right) dx_i. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$k = 1, 2, \dots, n-m,$

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 48.

Пусть полный интеграл системы (13) представляется уравненіемъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \quad (15)$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ обозначаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, при чемъ

$$D \left(V, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}, \frac{\partial V}{\partial b}, \frac{\partial V}{\partial b_1}, \frac{\partial V}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial b_{n-m}} \right) \geq 0. \quad (16)$$

Очевидно, что совокупность уравненій (15)-аго и его первыхъ производныхъ уравненій по $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ опредѣляетъ $n - m + 1$ различныхъ интеграловъ системы (14). Для разысканія остальныхъ $n - m$ интеграловъ, дифференцируемъ по всѣмъ величинамъ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ тождества, которыя получаются изъ данныхъ уравненій (13), вслѣдствіе подстановки въ нихъ рѣшенія (15). Такимъ образомъ получается рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n-m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x_{m+k}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до n .

Предположимъ, что, внутри разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ величинъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе.

Исключая изъ предыдущихъ тождествъ первой строки производную $\frac{\partial H_i}{\partial z}$, въ силу послѣдняго тождества, и раздѣляя полученный результатъ на $\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$, приходимъ къ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m.$$

Умножая соответственно на dx_i тождества, соответствующія значку i , и складывая ихъ, получаемъ, въ силу $n - m$ первыхъ уравненій (14), систему слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_{m+k} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

Полученныя уравненія приводятся къ слѣдующему виду уравненій въ точныхъ дифференциалахъ

$$d \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ интегральныя уравненія, опредѣляющія искомыя интегралы обобщенной канонической системы (14),

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} = a_s, \text{ или } \frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s \frac{\partial V}{\partial b},$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Какъ хорошо извѣстно ¹⁾, полученныя уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, въ силу неравенства (16), и, слѣдовательно, опредѣляемые ими интегралы системы (14) различны, а также отличны отъ прежнихъ $n - m + 1$ интеграловъ, такъ какъ не зависятъ отъ переменныхъ p_{m+k} .

Возьмемъ, наконецъ, систему m дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи, не зависящихъ отъ z и представленныхъ въ общемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ h &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

¹⁾ См. мое сочиненіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899, p.p. 460—461).

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшмы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , такъ что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0.$$

Составляемъ соответствующую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (см. стр. 148)

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} dx_i, \\ dp_r &= - \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^r}{\Delta} dx_i, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad r=1, 2, \dots, m,$

гдѣ Δ_{ik}, Δ_i^r обозначаютъ прежнія значенія определителей (см. ст. 147), съ тою только разницею, что здѣсь функции F_h не зависятъ отъ z .

Предположимъ извѣстнымъ полный интегралъ данныхъ уравненій (17)-ыхъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, b$ обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ удовлетворяется условіе

$$D \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}} \right) \geq 0.$$

Само собою разумѣется, что уравненія

$$F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_h,$$

$h=1, 2, \dots, m,$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$k=1, 2, \dots, n-m,$

опредѣляютъ n различныхъ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18), причемъ C_1, C_2, \dots, C_m обозначаютъ m различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Что касается остальныхъ $n-m$ интеграловъ послѣдней системы (18), то они вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Мы имѣемъ тождества

$$F_h \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m.$$

Дифференцируя ихъ послѣдовательно по b_1, b_2, \dots, b_{n-m} , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Вслѣдствіе неравенства нулю определителя Δ , разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и пользуясь прежними значеніями определителей Δ_{ik} , преобразовываемъ наши тождества въ слѣдующія новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Умножая послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, получаемъ, въ силу первыхъ $n-m$ уравненій (18), слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0,$$

или

$$d \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Поэтому становится очевиднымъ, что остальные искомыя $n-m$ интеграловъ системы (18) опредѣляются слѣдующими $n-m$ различными уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n-m,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ¹⁾.

Доказанныя предложенія легко распространяются также на системы частныхъ дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи общаго вида, заключающихъ явно неизвѣстную функцію z .

Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, систему m уравненій въ инволюціи, зависящихъ отъ неизвѣстной функціи z ,

$$\left. \begin{aligned} F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

для которыхъ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0.$$

Соотвѣтствующая система въ полныхъ дифференціалахъ представляется совокупностью прежнихъ уравненій (18) и слѣдующаго дополнительнаго

$$dz = - \sum_{i=1}^m \left(p_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} p_{m+k} \right), \quad (20)$$

при чемъ опредѣлители Δ , Δ_{ik} и Δ_i^r отличаются, въ настоящемъ случаѣ, отъ предыдущихъ ихъ значеній тѣмъ, что функціи F_h зависятъ здѣсь отъ перемѣнной z .

Пусть полный интегралъ системы (19) представляется уравненіемъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \quad (21)$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины, и кромѣ того существуетъ условіе

$$D \left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}} \right) \geq 0.$$

¹⁾ Этотъ результатъ былъ опубликованъ мною въ замѣткѣ: *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles (Comptes rendus, 24 juillet 1899)*.

Совокупность уравнения (21) и n слѣдующихъ

$$F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_h,$$

$$h = 1, 2, \dots, n - m,$$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n - m,$$

опредѣляетъ $n + 1$ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18) и (20), гдѣ C_1, C_2, \dots, C_m обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Остальные $n - m$ интеграловъ послѣдней системы вычисляются на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Составляемъ тождества, которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значений h , отъ 1 до m ,

$$\frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n - m,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b} = 0,$$

Предполагая, что, въ рассматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе, получаемъ аналогично предыдущему (см. стр. 171) новыя тождества для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n - m$,

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$$h = 1, 2, \dots, m.$$

Такъ какъ опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля, то, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и пользуясь прежними значеніями опредѣлителей Δ_{ik} , получаемъ тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-m$. Совершенно аналогично предыдущему умножаемъ послѣднія тождества соответственно на dx_i и складываемъ полученные результаты. При помощи полученныхъ такимъ образомъ тождествъ, дифференціальныя уравненія, соответствующія первымъ $n-m$ уравненіямъ (18), преобразовываются въ слѣдующія

$$d \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-m$. Такимъ образомъ искомыя интегралы опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} - a_s \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n-m,$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Подобно тому какъ мы только что распространили на системы уравненій съ частными производными первое изъ изложенныхъ доказательствъ теоремы Якоби, такъ совершенно аналогично возможно обобщить приведенное нами доказательство предложеній Лиувилля. Это обобщеніе не представляетъ никакихъ затрудненій, когда рассматриваемыя уравненія явно не зависятъ отъ функциональной перемѣнной z . Что касается случая, когда перемѣнная z входитъ въ данныя уравненія, тогда равенства, выражающія каноническія свойства интеграловъ, соответствующихъ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристикъ, представляются въ болѣе сложномъ видѣ. Для выраженія этихъ свойствъ въ рассматриваемомъ случаѣ оказывается необходимымъ составить выраженіе полного интеграла соответствующихъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій. То же самое замѣчаніе относится къ случаю Лиувилля, когда данныя интегралы въ инволюціи разрѣшаются относительно каноническихъ перемѣнныхъ съ различными значками и различныхъ классовъ. Этотъ случай

очевидно приводится къ первому, при помощи касательныхъ преобразований. Мы приходимъ такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ къ необходимости перейти къ тѣмъ же первоначальнымъ, исходнымъ условіямъ, на которыхъ основывались въ первомъ изъ данныхъ нами доказательствъ. Какъ намъ кажется, послѣднее, по простотѣ своей, повидимому не оставляетъ желать ничего лучшаго. Мы не станемъ входить въ виду этого въ дальнѣйшія подробности относительно доказательствъ изслѣдуемыхъ предложеній и перейдемъ къ рассмотрѣнію полныхъ интегральныхъ собраний С. Ли.

5. Какъ видно изъ изложенныхъ выше соображеній, слѣдуетъ по справедливости приписать Лиувиллю честь первенства, воспользоваться идеей интегральныхъ собраний С. Ли ¹⁾. Дѣйствительно, въ своей упомянутой выше статьѣ: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique...*, Лиувиль предусматривалъ случай полныхъ интегральныхъ собраний С. Ли, представляющихъ систему интеграловъ въ инволюціи канонической системы, которые неразрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ второго класса. При этомъ Лиувиль, и затѣмъ Лафонъ, разрѣшали представляющій здѣсь вопросъ въ самомъ общемъ видѣ, т. е. не ограничивались предположеніемъ, подобно С. Ли, что данные интегралы въ инволюціи не должны разрѣшаться относительно какихъ либо другихъ переменныхъ кромѣ тѣхъ, относительно которыхъ эти интегралы разрѣшимы, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ. Такимъ образомъ Лиувиль предпринялъ вопросъ объ усовершенствованіи, внесенномъ С. Ли въ способъ интегрированія Якоби-Майера, еще за долго до его созданія и до развитія общей теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Только этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ и возможно объяснить тотъ фактъ, что значеніе результатовъ Лиувилля не было оцѣнено раньше и что потребовался долгій промежутокъ времени, съ 50-ыхъ до 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія, т. е. двадцатилѣтній періодъ въ развитіи теоріи дифференціальнахъ уравненій съ частными производными, пока С. Ли не пришелъ къ аналогичнымъ результатамъ. Если я не ошибаюсь, то въ литературѣ разсматриваемой области математическаго анализа только здѣсь, на этихъ страницахъ моего изслѣдованія, приводятся впервые настоящія историко-критическія соображенія, устанавливающія сравнительную оцѣнку трудовъ Лиувилля и С. Ли. Этому послѣднему факту я также нахожу истолкованіе и объясняю его тѣмъ, что С. Ли облакалъ въ столь сложную форму изложеніе своихъ результатовъ, что ихъ практическое значеніе, сущность и взаимная связь съ трудами предыдущихъ изслѣдователей ускользаютъ отъ вниманія читателя.

¹⁾ См. мое сообщеніе: *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (Comptes rendus. 17 août 1903)

Чтобы восполнить отмѣченный пробѣлъ и установить преемственную зависимость между классической теоріей уравненій съ частными производными и изслѣдованіями С. Ли, мы продолжимъ на послѣдующихъ страницахъ изученіе полныхъ интеграловъ С. Ли.

Начнемъ съ разсмотрѣнія вопроса о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, на основаніи извѣстнаго полного интеграла С. Ли соответствующихъ производныхъ уравненій и перейдемъ затѣмъ къ задачѣ о переходѣ отъ полного интеграла С. Ли къ полному интегралу Лагранжа.

Если производныя уравненія данной системы, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ поставленный нами вопросъ разрѣшается на основаніи изложенной выше теоріи касательныхъ преобразованій. Дѣйствительно, приводя полное интегральное собраніе С. Ли, соответствующее данному полному интегралу, къ совокупности $n + 1$ уравненій въ инволюціи, при помощи соображеній, аналогичныхъ изложеннымъ на страницахъ 54—57, легко затѣмъ получить искомый общій интегралъ, какъ это показано у Goursat: *Leçons sur l'intégration...* (n° 108, p. p. 276—277). Составивъ общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, мы получаемъ затѣмъ извѣстнымъ образомъ полный интегралъ Лагранжа соответствующихъ производныхъ уравненій, разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Такимъ образомъ оба намѣченные вопроса разрѣшаются при помощи алгебраическихъ исключеній. Ходъ послѣднихъ вычисленій однако упрощается и распространяется также на замкнутыя системы уравненій, если принять во вниманіе свойства полныхъ интеграловъ С. Ли, аналогичныя свойствамъ полныхъ интеграловъ Лагранжа, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и приступаемъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (22)$$

Составляемъ соответствующую ему каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \frac{dp_{r+1}}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{r+1}}, \\ r &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Предположимъ, что данное уравненіе (22) имѣетъ полное рѣшеніе С. Ли q -аго класса, которое представляется слѣдующимъ образомъ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b, \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad k = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

при чемъ b_1, b_2, \dots, b_n обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, и пусть имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta = D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \dots, \psi_{n-q}}{b_1, b_2, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_{n-1}} \right), \quad (25)$$

гдѣ обозначенія ψ имѣютъ прежнія указанная выше значенія

$$\psi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}.$$

Легко показать, что общій интегралъ канонической системы (23) определяется совокупностью уравненій

$$\left. \begin{aligned} x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, q, \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ k &= 2, 3, \dots, n-q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} &= a_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

идь a_1, a_2, \dots, a_{n-1} представляютъ $n-1$ новыхъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Во-первыхъ, нетрудно убѣдиться, что послѣднія $n-1$ уравненій (26) разрѣшимы относительно переменныхъ

$$x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n. \quad (27)$$

Въ самомъ дѣлѣ, вводимъ обозначенія

$$\theta_s \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i}$$

и составляемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$\Delta' \equiv D \left(\frac{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-q-1}, \theta_{n-q}, \dots, \theta_{n-1}}{x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n} \right).$$

Въ силу значений функций θ_s и ψ_k , становится очевиднымъ, что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}, \quad (28)$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$, значений k , отъ 1 до $n-q$ и значений i , отъ 1 до q . Поэтому опредѣлитель Δ' принимаетъ слѣдующее значеніе

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_1} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_2} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-1}} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Послѣ перестановки столбцовъ въ послѣднемъ опредѣлителѣ, легко видѣть, что онъ выражается слѣдующимъ образомъ черезъ опредѣлитель Δ

$$\Delta' = (-1)^{(n-q)q} \Delta.$$

Поэтому, въ силу неравенства (25), рассматриваемый опредѣлитель Δ' также отличенъ отъ нуля

$$\Delta' \neq 0.$$

Слѣдовательно, послѣднія $n-1$ уравненія (26) разрѣшимы относительно переменныхъ (27), и, стало-быть, система уравненій (26) опредѣляетъ значенія всѣхъ переменныхъ величинъ

Томъ IX, № 4 и 5.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

Исслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными
перваго порядка одной неизвѣстной функціи. *Н. Н. Салтыкова.* . 145

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества
издаются подъ редакцію распорядительнаго
комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по
мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть вы-
пусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ второй серіи благоволятъ
адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій
Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ,
1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ
книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи
(48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества,
просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій
Университетъ.

Table des matières.

Pages.

Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles
du premier ordre d'une fonction inconnue; par *M. N. Saltykow* . . 145

Title Page

Sci 905.75

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome IX, № 6.

**СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.**

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ IX.

№ 6.

ХАРЬКОВЪ.

Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.

(Рыбная улица, домъ № 30-В).

1906.



На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать
и выпустить въ свѣтъ разрѣшается.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ*.

$$x_2, x_3, \dots x_n, p_2, p_3, \dots p_n \quad (29)$$

въ функціяхъ независимой переменной x_1 и $2(n-1)$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ

$$b_1, b_2, \dots b_{n-1}, a_1, a_2, \dots a_{n-1}.$$

Наша задача приводится такимъ образомъ къ доказательству, что послѣднія значенія представляютъ общій интегралъ канонической системы (23). Убѣдиться въ этомъ легко различными способами. Мы начнемъ съ изложенія доказательства, аналогичнаго такъ называемому первому способу Якоби, въ классической теоріи частныхъ дифференціаль-ныхъ уравненій.

Функциональныя значенія переменныхъ (29), опредѣляемые системой уравненій (26), будучи подставлены въ эти послѣднія уравненія, обращаютъ ихъ въ тождества. Полученныя такимъ образомъ тождества дифференцируемъ по x_1 и приходимъ къ новымъ тождествамъ, которыя, въ силу равенствъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma \partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\sigma \partial x_k} p_{n-q+i} &\equiv \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\sigma \partial b_s} p_{n-q+i} &\equiv \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial b_s}, \end{aligned}$$

принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} \frac{dx_{r+1}}{dx_1}, \\ \frac{dp_k}{dx_1} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=2, 3, \dots, n-q, \quad s=1, 2, \dots, n-1.$

Съ другой стороны уравненія, соответствующія первымъ двумъ строкамъ системы (26), и уравненіе $p_1 = \psi_1$ утождествляютъ данное уравненіе (22), рассматриваемое какъ производное уравненіе С. Ли, и мы имѣемъ поэтому слѣдующее тождество

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}, \\ p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

справедливое для всѣхъ значений переменныхъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$$

и произвольныхъ постоянныхъ величинъ b_1, b_2, \dots, b_{n-1} . Поэтому дифференцируя написанное тождество по всѣмъ послѣднимъ величинамъ и принимая во вниманіе слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial p_{n-q+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q,$$

получаемъ въ результатѣ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} &= 0, \\ - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} &= 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} &= 0, \\ k=2, 3, \dots, n-q, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad s=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Сопоставляя тождества системъ (30) и (32), соответствующія однимъ и тѣмъ же значкамъ i, k, s , легко приходимъ къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} &= \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right), \\ i=1, 2, \dots, q, \\ \frac{dp_k}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) &= 0, \\ k=2, 3, \dots, n-q, \\ \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \left(\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) &= 0, \\ s=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Въ силу неравенства (25), изъ послѣднихъ $n-1$ тождествъ вытекають слѣдующія тождества

$$\frac{dx_{r+1}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, \quad \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},$$

$r=1, 2, \dots, n-q-1, \quad i=1, 2, \dots, q.$

На основаніи послѣднихъ, предыдущія двѣ системы тождествъ даютъ остальные искомыя тождества

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=2, 3, \dots, n-q.$

Такимъ образомъ полученныя тождества показываютъ, что значенія переменныхъ (29), опредѣляемыя уравненіями (26), утождествляютъ каноническую систему (23) и представляютъ, стало-быть, ея общій интеграль.

Легко дать еще другое новое, отличное отъ предыдущаго доказательство разсматриваемаго предложенія, приводящееся къ тому, чтобы показать, что разсматриваемая нами система уравненій (26) опредѣляетъ всѣ $2n-2$ интеграловъ каноническихъ уравненій (23). Въ силу неравенства (25), $n-1$ уравненій первой и второй строки системы (26) разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , и мы получаемъ такимъ образомъ $n-1$ слѣдующихъ интеграловъ уравненій (23)

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= b_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Эти уравненія представляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи, какъ это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, разсмотрѣнныхъ во второй главѣ. Поэтому скобки Пуассона, составленныя изъ всѣхъ функцій F_1, F_2, \dots, F_{n-1} попарно, уничтожаются тождественно, т. е. *существуетъ рядъ тождествъ*

$$(F_s, F_\sigma) = 0, \quad (34)$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и σ , отъ 1 до $n-1$.

Внося функціональныя значенія b_s , опредѣляемыя уравненіями (33), въ послѣднія $n-1$ равенствъ (26), получаемъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} f_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= a_s, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Мы приводимъ доказательство разсматриваемаго предложенія къ тому, чтобы показать, что послѣднія уравненія представляютъ $n-1$ остальныхъ интеграловъ системы (23), отличныхъ отъ интеграловъ (33).

Такъ какъ уравненія (33) и (35) являются преобразованиемъ системы (26), разрѣшимой относительно переменныхъ (29), то само собою разумѣется, что уравненія (35) представляютъ систему $n-1$ различныхъ равенствъ, отличныхъ отъ (33)-хъ. Кроме того легко видѣть, что функціи f_s представляютъ интегралы линейнаго уравненія съ частными производными функціи f , соответствующаго обыкновеннымъ уравненіямъ (23),

$$(p_1 + H, f) = 0, \quad (36)$$

гдѣ послѣднія скобки Пуассона распространяются на всѣ переменныя $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$.

Дѣйствительно, замѣчая, что функціи f_s имѣютъ значенія

$$f_s \equiv \theta_s(x_1, x_1, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}),$$

приводимъ выраженія скобокъ Пуассона

$$(p_1 + H, f_s)$$

къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} (p_1 + H, f_s) \equiv & \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} + \\ & + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r} (p_1 + H, F_r). \end{aligned}$$

Такъ какъ функціи F_r представляютъ интегралы уравненія (36), то имѣютъ мѣсто тождества

$$(p_1 + H, F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній r , отъ 1 до $n-1$. Поэтому предыдущія равенства становятся

$$(p_1 + H, f_s) \equiv \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}$$

и, на основаніи тождествъ (28), принимаютъ слѣдующее значеніе

$$(p_1 + H, f_s) \equiv \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Легко видѣть, что правыя части послѣднихъ равенствъ представляютъ тождественный нуль. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія (24) представляютъ полный интеграль С. Ли даннаго уравненія (22), то существуетъ тождество

$$\psi_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n) = 0.$$

Дифференцируя послѣднее по b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ (представленныхъ послѣднею строкою системы (32))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Поэтому предыдущія равенства принимаютъ видъ

$$(p_1 + H, f_s) = 0,$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$, и показываютъ, что функціи f_1, f_2, \dots, f_{n-1} служатъ интегралами линейнаго уравненія (36), т. е. уравненія (35) представляютъ $n-1$ интеграловъ канонической системы (23) и, вмѣстѣ съ уравненіями (33), представляютъ полную систему ея $2n-2$ различныхъ интеграловъ.

Мы приведемъ еще одно, третье по счету, и самое простое доказательство разсматриваемаго предложенія, представляющее распространеніе на полные интегралы С. Ли даннаго нами доказательства теоремы Якоби-Лиувилля, въ началѣ настоящей главы.

Съ этою цѣлью возвращаемся къ тождествамъ (37), представляющимъ непосредственное слѣдствіе существованія полнаго интегральнаго собранія С. Ли (24) даннаго уравненія (22). Въ силу слѣдующихъ изъ уравненій канонической системы (23)

$$\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = - \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}, \quad \frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$i = 1, 2, \dots, q, \quad k = 2, 3, \dots, n-q.$

тождества (37) приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} \frac{dx_k}{dx_1} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n-1.$

Принимая во вниманіе отмѣченныя выше равенства

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial b_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_s} p_{n-q+i},$$

мы преобразовываемъ послѣднія уравненія къ такому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1 \partial b_s} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \\ + \sum_{k=2}^{n-q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_s \partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial x_k} p_{n-q+i} \right) \frac{dx_k}{dx_1} = 0, \end{aligned}$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Легко видѣть, что лѣвыя части написанныхъ уравненій представляютъ точные дифференціалы, такъ что изслѣдуемыя уравненія становятся въ полныхъ дифференціалахъ

$$d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right) = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n-1.$

Итакъ искомыя интегральныя уравненія имѣютъ значенія

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} = a_s,$$

$s = 1, 2, \dots, n-1.$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-1} обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

6. Какъ извѣстно, каноническія системы дифференціальныхъ уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ обладаютъ такъ называемыми каноническими системами интеграловъ ¹⁾. Легко показать, что уравненія (26) опредѣляютъ такую каноническую систему интеграловъ

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899, p. 435).

уравнений (23), совершенно аналогично Гамильтонъ-Якобіевской теоріи, т. е. что интегралы (33) и (35) системы (23) являются каноническими, удовлетворяя условіямъ (34) и еще слѣдующимъ

$$(F_r, f_s) \equiv \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases} \quad (38)$$

$$(f_r, f_s) \equiv 0,$$

для всѣхъ значений указателей r и s , отъ 1 до $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ существованіи послѣднихъ равенствъ, составляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_\sigma} (F_r, F_\sigma),$$

которыя, въ силу условій (34), приводятся къ виду

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}. \quad (39)$$

Послѣднее равенство, на основаніи тождества (28), преобразовывается въ слѣдующее

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Въ виду того, что уравненія (33) представляютъ преобразованіе первыхъ $n-1$ уравненій (26), то результатъ подстановки опредѣляемыхъ ими значений переменныхъ

$$x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_{n-q},$$

въ уравненія (33), представляетъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}, \\ p_{n-q+1}, \dots, p_n) = h_r, \\ r = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Дифференцируя послѣднія по любой изъ величинъ b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній r и s , отъ 1 до $n-1$. Поэтому, вслѣдствіе полученныхъ тождествъ, предыдущія выраженія скобокъ (F_r, f_s) даютъ первый рядъ искомымъ нами условий (38)

$$(F_r, f_s) = \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

Наконецъ, для разысканія значенія скобокъ (f_r, f_s) , составляемъ слѣдующее выраженіе

$$\begin{aligned} (f_r, f_s) &\equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} (F_u, \theta'_s) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\theta'_r, F_v) + \\ &+ \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-2} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v), \end{aligned}$$

гдѣ значки при θ_u и θ'_r , въ первыхъ двухъ суммахъ, обозначаютъ, что функции θ_s , θ'_r , при составленіи скобокъ Пуассона, дифференцируются только по тѣмъ переменнымъ x и p , которыя входятъ въ нихъ непосредственно. Поэтому мы имѣемъ

$$\begin{aligned} (F_u, \theta'_s) &\equiv \sum_{k=2}^q \frac{\partial F_u}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}, \\ (\theta'_r, F_v) &\equiv \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_r}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_r}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ выраженій имѣетъ видъ правой части равенства (39), второе же отличается отъ послѣдняго обратнымъ знакомъ. Поэтому, на основаніи предыдущихъ вычисленій, заключаемъ, что

$$\begin{aligned} (F_u, \theta'_s) &= \begin{cases} 0, & u \geq s, \\ 1, & u = s, \end{cases} \\ (\theta'_r, F_v) &= \begin{cases} 0, & v \geq r, \\ -1, & v = r. \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Въ силу послѣднихъ равенствъ и условій (34), выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$(f_r, f_s) \equiv \frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} - \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r}.$$

Такъ какъ выраженія производныхъ, въ правой части послѣдняго равенства, имѣютъ соотвѣтственно значенія

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} &\equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_r \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_r \partial b_s} p_{n-q+i}, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r} &\equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_s \partial b_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_r} p_{n-q+i}, \end{aligned}$$

то мы приходимъ къ остальнымъ искомымъ условіямъ (38).

$$(f_r, f_s) \equiv 0,$$

которыя справедливы для всѣхъ значеній r и s , отъ 1 до $n-1$.

Въ дополненіе къ выведеннымъ равенствамъ прибавимъ еще слѣдующія.

На основаніи уравненій (33), первое уравненіе (24) приводится къ слѣдующему виду

$$z - F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b_n, \quad (42)$$

гдѣ функція F имѣетъ значеніе

$$F \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}).$$

Такъ какъ уравненія (24) образуютъ замкнутую систему, то представляющія ихъ преобразованіе уравненія (22), (33) и (42) составляютъ также замкнутую систему, при чемъ, кромѣ условій (34) и (38), имѣютъ мѣсто еще слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} [p_1 + H, z - F] &= 0, \\ [F_s, z - F] &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Въ виду того, что лѣвыя части послѣднихъ $n-1$ равенствъ не зависятъ отъ величинъ $p_1, b_1, b_2, \dots, b_n$, то эти равенства не могутъ быть слѣдствіемъ разсматриваемыхъ уравненій и, стало-быть, удовлетворяются

тождественно, тогда какъ первое равенство (43) является слѣдствіемъ даннаго уравненія (22).

Вычислимъ, наконецъ, значеніе скобокъ Вейлера

$$[z - F, f_s] \equiv [z, f_s] - [F, f_s].$$

Очевидно существуютъ слѣдующія равенства

$$\begin{aligned} [z, f_s] &\equiv - \sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{\sigma=2}^n p_{\sigma} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \frac{\partial F_v}{\partial p_{\sigma}}, \\ [F, f_s] &\equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial b_u} (F_u, \theta'_s) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\varphi', F_v) + \\ &\quad \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v). \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе условія (34), (41), значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(\varphi', F_v) \equiv - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k},$$

и тождества (28), приходимъ къ слѣдующему выраженію разсматриваемыхъ скобокъ Вейлера

$$\begin{aligned} [z - F, f_s] &\equiv \sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} + \\ &+ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \left(\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} - \sum_{\sigma=2}^n p_{\sigma} \frac{\partial F_v}{\partial p_{\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ, находящееся въ послѣдней строкѣ, на основаніи уравненій послѣдней строки системы (24), приводится къ слѣдующему виду

$$\sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \left(\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} - \frac{\partial F_v}{\partial p_{n-q+i}} \right). \quad (44)$$

Возвращаясь къ тождествамъ (40) и дифференцируя ихъ по переменнымъ p_{n-q+i} , мы получаемъ новыя тождества

$$\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} + \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-q+i}} = 0.$$

Поэтому выражение (44) уничтожается тождественно. Такъ какъ во всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ величины b_i замѣнены ихъ функціональными значеніями F_i , то очевидно, что искомыя зависимости имѣють слѣдующій видъ

$$[z - F, f_s] = -f_s, \quad (45)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$.

7. Воспользуемся выведенными каноническими свойствами (34), (38), (43) и (45) интеграловъ (33) и (35) канонической системы (23), для рѣшенія вопроса о переходѣ отъ полнаго интеграла С. Ли (24) даннаго уравненія (22) къ его полному интегралу Лагранжа. Благодаря каноническимъ свойствамъ разсматриваемыхъ интеграловъ, является возможность обойти необходимость составленія общаго интеграла системы (23), для рѣшенія поставленной задачи. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (25), существуетъ, по меньшей мѣрѣ, одна пара его сопряженныхъ миноровъ, соотвѣтственно порядковъ q и $n-q-1$, которые отличны отъ нуля. Не нарушая общности разсужденій, мы можемъ предположить, что слѣдующіе два опредѣлителя отличны отъ нуля

$$\Delta_1 \equiv D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q}{b_1, b_2, \dots, b_q} \right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_q} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_q} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_q} \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$\Delta_2 \equiv D \left(\frac{\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}} \right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{q+1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+1}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+2}} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Если послѣднія условія имѣютъ мѣсто, то легко доказать, что система n уравненій въ инволюціи, опредѣляющихъ, при помощи квадратуры, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), рассматриваемая какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, представляется совокупностью уравненія (22) и $n-1$ слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F_{q+k}(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= b_{q+k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Такъ какъ указатели $q+k$ и r имѣютъ различныя значенія, то очевидно, что послѣдніе интегралы находятся въ инволюціи. Кроме того легко убѣдиться, что система интеграловъ (45) разрѣшима относительно всѣхъ переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n . Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (45) равносильны слѣдующимъ уравненіямъ, которыя представляютъ ихъ преобразование и состояются такимъ образомъ.

Прежде всего замѣтимъ, что въ силу условія $\Delta_1 \geq 0$, первыя q уравненій системы (26) разрѣшаются относительно величинъ b_1, b_2, \dots, b_q и опредѣляютъ ихъ значенія

$$\left. \begin{aligned} b_i &= \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Поэтому, въ силу неравенства нулю опредѣлителя (25), первыя $n-q-1$ уравненій (45) получаются изъ уравненій

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-q,$$

путемъ исключенія изъ нихъ значеній b_1, b_2, \dots, b_q , опредѣляемыхъ предыдущими равенствами (46). Слѣдовательно, $n-q-1$ первыхъ уравненій (45) равнозначны уравненіямъ

$$p_k = (\psi_k), \quad k = 2, 3, \dots, n-q, \quad (47)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ указанной подстановки. Что касается остальныхъ уравненій (45), т. е. q послѣднихъ, то они равносильны уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_r} \right) - \sum_{i=1}^q \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_r} \right) p_{n-q+i} &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

гдѣ, какъ и раньше, скобки отмѣчаютъ результатъ подстановки значеній b_1, b_2, \dots, b_q , опредѣляемыхъ уравненіями (46). Последняя система (48) линейна относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$; определитель, составленный изъ коэффициентовъ при послѣднихъ переменныхъ, представляетъ выраженіе (Δ_1) , гдѣ скобки имѣютъ прежнее значеніе. Такъ какъ послѣдній определитель не равенъ нулю, то, слѣдовательно, уравненія (48) разрѣшмы относительно всѣхъ переменныхъ p_{n-q+1} . Внося значенія послѣднихъ въ уравненія (47), мы получаемъ изъ нихъ выраженія остальныхъ переменныхъ p . Такимъ образомъ получаютъся выраженія всѣхъ переменныхъ

$$p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$$

въ функціяхъ величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_q, b_{q+1}, \dots, b_n.$$

Присоединяя сюда значеніе переменной p_1 , опредѣляемой въ видѣ функціи тѣхъ же самыхъ величинъ, при помощи данного уравненія (22), мы приводимъ къ квадратурѣ вопросъ о разысканіи полного интеграла Лагранжа послѣдняго уравненія, рассматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными.

Однако, благодаря выведеннымъ выше условіямъ (43) и (44), легко получить искомый интегралъ, при помощи алгебраическихъ исключеній, воспользовавшись уравненіемъ (42), и обойтись такимъ образомъ безъ операціи интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, составляемъ выраженіе

$$\Phi \equiv z - F + \sum_{i=1}^q f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Вейлера

$$[p_1 + H, \Phi] \equiv [p_1 + H, z - F] + \sum_{i=1}^q \left[f_i (p_1 + H, F_i) + F_i (p_1 + H, f_i) \right],$$

$$[\Phi, F_{q+k}] \equiv [z - F, F_{q+k}] + \sum_{i=1}^q \left[f_i (F_i, F_{q+k}) + F_i (f_i, F_{q+k}) \right],$$

$$[\Phi, f_r] \equiv [z - F, f_r] + \sum_{i=1}^q \left[f_i (F_i, f_r) + F_i (f_i, f_r) \right],$$

соотвѣствующихъ значеніямъ k , отъ 1 до $n-q-1$, и значеніямъ r , отъ 1 до q . Какъ легко видѣть, послѣднія выраженія уничтожаются на основаніи условій (34), (38), (43) и (44), и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$[p_1 + H, \Phi] = 0,$$

$$[\Phi, F_{q+k}] = 0, [\Phi, f_r] = 0,$$

$$k=1, 2, \dots, n-q-1, \quad r=1, 2, \dots, q.$$

Такъ какъ равенства (43) удовлетворяются на основаніи уравненія (22), то отсюда слѣдуетъ, что совокупность уравненій (22), (45) и слѣдующаго

$$z = F - \sum_{i=1}^q f_i F_i + b, \quad (49)$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину, образуетъ замкнутую систему $n+1$ уравненій, разрѣшимыхъ относительно переменныхъ z, p_1, p_2, \dots, p_n . Поэтому опредѣляемое послѣдними уравненіями значеніе переменной z , функцией переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n и n произвольныхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b$, представляетъ искомый полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), рассматриваемаго какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными. Другими словами послѣдній интегралъ получается какъ результатъ подстановки въ уравненіе (49) значеній величинъ p_2, p_3, \dots, p_n , опредѣляемыхъ уравненіями (45). Очевидно, что въ результатѣ послѣдней подстановки функции $f_1, f_2, \dots, f_q, F_{q+1}, \dots, F_{n-1}$ тождественно обращаются соответственно въ $a_1, a_2, \dots, a_q, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}$, и мы получаемъ

$$z = \Phi [x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, (F_1), (F_2), \dots, (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}] - \left. \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^q a_i (F_i) + b, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

гдѣ скобки, въ выраженіяхъ (F_i) , обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Возьмемъ, на примѣръ, уравненіе ¹⁾

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_4 p_4) x_4 p_2}{x_1 p_3} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \quad (51)$$

Это уравненіе имѣетъ полное интегральное собраніе S . Ли второго класса, представленное совокупностью уравненій

$$z = h_4, \quad (52)$$

¹⁾ Последнее уравненіе, но только въ другихъ обозначеніяхъ, служило примѣромъ также въ н°3 настоящей главы.

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= b_2 (x_1 - b_1) - \frac{x_1 x_2}{b_3}, \\ x_4 &= \frac{b_3}{x_1 - b_1}, \\ p_1 &= \left(\frac{x_2}{b_3} - b_2 \right) p_3 + \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2} p_4, \\ p_2 &= \frac{x_1}{b_3} p_3, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

при чемъ, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующій функциональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{\varphi_1}{b_1}, \frac{\varphi_2}{b_2}, \frac{\psi_2}{b_3}\right) \equiv \frac{x_1 p_3}{b_3 (x_1 - b_1)} \geq 0.$$

Поэтому общій интегралъ канонической системы, соответствующей данному уравненію (51), опредѣляется совокупностью второго, третьяго и послѣдняго уравненія системы (52) и слѣдующими тремя уравненіями

$$\left. \begin{aligned} b_2 p_3 - \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2} p_4 &= a_1, \\ -(x_1 - b_1) p_3 &= a_2, \\ -\frac{x_1 x_2}{b_3^2} p_3 - \frac{1}{x_1 - b_1} p_4 &= a_3, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

гдѣ a_1 , a_2 и a_3 обозначаютъ три новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Чтобы составить полный интегралъ Лагранжа данного уравненія (51), замѣчаемъ, что слѣдующихъ два сопряженныхъ минора разсматриваемаго опредѣлителя неравны нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_2} \end{vmatrix} \equiv -\frac{b_3}{x_1 - b_1} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial b_3} \equiv -\frac{x_1 p_3}{b_3^2} \geq 0.$$

Поэтому второе и третье уравнения системы (52) разрѣшаются относительно величинъ b_1 , b_2 и даютъ ихъ слѣдующія значения

$$b_1 = x_1 - \frac{b_3}{x_4},$$

$$b_2 = \frac{x_4}{b_3} \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right).$$

Въ силу этихъ значений b_1 и b_2 , первое и второе уравнения (53) опредѣляютъ значенія p_3 и p_4

$$p_3 = -\frac{a_2 x_4}{b_3}, \quad p_4 = -\left[\frac{a_1 b_3}{x_4^2} + \frac{a_2}{b_3} \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) \right].$$

Наконецъ, послѣднія два уравнения системы (52) даютъ выраженія

$$p_1 = -\left(a_1 + \frac{a_2 x_2 x_4}{b_3^2} \right), \quad p_2 = -\frac{a_2}{b_3^2} x_1 x_4.$$

Поэтому искомый полный интегралъ находится при помощи интегрированія точнаго дифференціала

$$\begin{aligned} dz = & -a_1 dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2} \left[x_4 (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + x_1 x_2 dx_4 \right] - \\ & - \frac{a_2}{b_3} (x_4 dx_3 + x_3 dx_4), \end{aligned}$$

или

$$dz = -a_1 dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2} d(x_1 x_2 x_4) - \frac{a_2}{b_3} d(x_3 x_4).$$

Отсюда, при помощи квадратуры, получаемъ

$$z = a_1 \left(\frac{b_3}{x_4} - x_1 \right) - \frac{a_2}{b_3} x_4 \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) + b,$$

гдѣ a_1 , a_2 , b_3 и b представляютъ четыре произвольныхъ постоянныхъ величины.

Прилагая къ настоящему случаю формулу (50), легко составить искомый полный интегралъ даннаго уравненія (51), исключительно исходя изъ

уравнений (52) и (53). Действительно, въ настоящемъ случаѣ формула (50) становится

$$z = -a_1 (F_1) - a_2 (F_2) + b,$$

и функція F_1, F_2 имѣютъ слѣдующія значенія

$$F_1 \equiv x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_4 p_2} \right), \quad F_2 \equiv (x_2 p_2 + x_3 p_3) \frac{x_1 p_2}{x_1 p_3^2}.$$

Подставляя сюда найденныя выше значенія переменныхъ p_2, p_3 и p_4 , въ функціяхъ всѣхъ переменныхъ x и постоянныхъ a_1, a_2, b_3 , получаемъ

$$(F_1) \equiv x_1 - \frac{b_3}{x_4}, \quad (F_2) \equiv \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) \frac{x_4}{b_3}.$$

Итакъ, искомый полный интегралъ выражается въ прежнемъ видѣ

$$z = a_1 \left(\frac{b_3}{x_4} - x_1 \right) - \frac{a_2}{b_3} x_4 \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) + b.$$

8. На послѣдующихъ строкахъ имѣется въ виду отмѣтить еще два доказательства предложенія, приведеннаго въ н^о 5-мъ настоящей главы, которыя отличны отъ прежнихъ трехъ доказательствъ.

Такъ какъ полный интегралъ С. Ли (26) приводитъ къ $n-1$ интеграламъ въ инволюціи (33) канонической системы (23), которые разрѣшаются относительно переменныхъ $p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$ (и неразрѣшима относительно каноническихъ переменныхъ второго класса), то всѣ разсужденія, которыми мы пользовались выше (см. н^о 3 настоящей главы) для доказательства теоремы Лиувилля, примѣняются также и въ настоящемъ случаѣ. Поэтому, сохраняя наши обозначенія, получаемъ, примѣнительно къ разсматриваемымъ условіямъ, слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} &= \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, & \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} &= -\frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q, & i &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Очевидно, что послѣднія уравненія образуютъ интегрируемую систему. Кромѣ того такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто полный интегралъ С. Ли (24), то поэтому существуютъ равенства

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \quad x_{n-q+i} = \varphi_i,$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній k , отъ 1 до $n-q$, и значеній i , отъ 1 до q . Вслѣдствіе этого заключаемъ, что уравненія (54) приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial b_s} p_{n-q+i}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s},$$

$k = 1, 2, \dots, n-q, \quad i = 1, 2, \dots, q.$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Отсюда искомыя функціи θ_s опредѣляются при помощи квадратуръ

$$\theta_s = \int \left[\sum_{k=1}^{n-q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial b_s} p_{n-q+i} \right) dx_k - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right],$$

$s = 1, 2, \dots, n-1,$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины. Такъ какъ предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\theta_s = \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right),$$

$s = 1, 2, \dots, n-1,$

то мы получаемъ прежній результатъ

$$\theta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$

$s = 1, 2, \dots, n-1.$

Къ тому же самому заключенію мы приходимъ также, прилагая въ настоящемъ случаѣ теорему Якоби-Лиувилля, изложенную въ концѣ н^о 3-ьяго настоящей главы. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (23) представимъ въ видѣ слѣдующей новой канонической системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \frac{\partial (-p_{n-q+i})}{\partial x_1} &= \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}, \\ \frac{\partial p_{r+1}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{r+1}}, & \frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial (-p_{n-q+i})}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$r=1, 2, \dots, n-q-1, \quad i=1, 2, \dots, q.$

Пусть известна для последней системы совокупность $n-1$ различных интегралов въ инволюции, которые разрѣшаются относительно всѣхъ каноническихъ переменныхъ второго класса

$$p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n.$$

Поэтому представляя интегралъ точнаго дифференціала

$$dz = \sum_{k=1}^{n-q} p_k dx_k + \sum_{i=1}^q -x_{n-q+i} dp_{n-q+i}$$

въ слѣдующемъ видѣ

$$z = U(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b, \quad (56)$$

гдѣ b —новая произвольная постоянная величина, мы выражаемъ общій интегралъ канонической системы (55) при помощи уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_{r+1} &= \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}}, & x_{n-q+i} &= -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}, \\ r=1, 2, \dots, n-q-1, & & i=1, 2, \dots, q, \\ \frac{\partial U}{\partial b_s} &= a_s, \\ s=1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ $n-1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Предполагая, что интегралъ (56) удовлетворяетъ условію

$$D \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial p_n} ; \frac{b_1}{b_2}, \frac{b_2}{b_3}, \dots, \frac{b_{n-1}}{b_n} \right) = 0, \quad (58)$$

закключаемъ, что послѣднія $n-1$ уравненій (57) разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ

$$x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n.$$

Подставляя вмѣсто функций U значеніе ея, выраженное при помощи интеграла, получаемъ

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int \left(\sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} dx_k + \sum_{i=1}^q - \frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right).$$

Если разсматриваемая нами система интеграловъ въ инволюціи представляется уравненіями (33), которые получаются изъ системы (24), то очевидно, что аналогично предыдущему, послѣднее равенство становится

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Такимъ образомъ оказывается, что изслѣдованныя нами уравненія

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} = a_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

тождественны послѣднимъ $n-1$ уравненіямъ (57) и заключаются, стало-быть, какъ частный случай въ общихъ формулахъ, соответствующихъ предположеніямъ Лиувилля, по отношенію къ которымъ условія, опредѣляющія полное интегральное собраніе C . Ли, являются лишь частнымъ случаемъ.

Какъ извѣстно, уравненія (57) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ и, для случая C . Ли, обращаются тождественно въ уравненія (26), какъ это легко видѣть, благодаря только что выведенному заключенію. Поэтому приведенное нами выше предложеніе, что уравненія (26) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ системы (23), является также частнымъ случаемъ общей теоріи каноническихъ уравненій.

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о составлении общего интеграла канонических уравнений, исходя из полного интеграла C . Ли соответствующаго производнаго уравненія, слѣдуетъ отмѣтить, что выведенное выше выраженіе (50) полного интеграла Лагранжа уравненія (22), рассматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными, представляетъ обобщеніе упомянутыхъ выше результатовъ Майера, Дарбу и Бертрана. Легко видѣть, что выраженія полного интеграла уравненія (22), полученные послѣдними геометрами, заключаются въ формулѣ (50) въ томъ частномъ случаѣ, когда начальныя значенія переменныхъ принимаются за произвольныя постоянныя величины въ общемъ интегралѣ канонической системы (23).

9. Мы имѣемъ въ виду далѣе распространить только что полученные результаты на общій интегралъ каноническихъ уравненій (23) въ самомъ общемъ предположеніи Лиувилля.

Пусть данныя $n-1$ интеграловъ въ инволюціи каноническихъ системъ (23), или (55) разрѣшаются относительно каноническихъ переменныхъ второго класса по отношенію какъ къ первой такъ и ко второй канонической системѣ. Предположимъ, что, въ виду простоты вычисленій, мы разрѣшили рассматриваемые интегралы относительно переменныхъ $p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$. Въ такомъ случаѣ общій интегралъ обѣихъ рассматриваемыхъ каноническихъ системъ одновременно представляется уравненіями (57).

Очевидно, что, въ силу условія (58), уравненія (57) разрѣшимы относительно всѣхъ переменныхъ $x_2, x_3, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n$. Поэтому интегрированіе уравненія

$$dz = \left(p_1 + \sum_{r=1}^{n-1} p_{r+1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) dx_1$$

совершается при помощи квадратуры, и затѣмъ полный интегралъ уравненія (22) опредѣляется на основаніи теоріи характеристикъ.

Наша задача, къ рѣшенію которой мы теперь переходимъ, состоитъ въ доказательствѣ, что достаточно уравненій (56) и (57) для составленія полного интеграла Лагранжа уравненія (22), при помощи алгебраическихъ преобразованій, не совершая указаннаго выше новаго интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, необходимо отличны отъ нуля, по меньшей мѣрѣ, значенія одной пары сопряженныхъ миноровъ, порядковъ q -аго и $n-q-1$ -аго, опредѣлителя первой части неравенства (58). Поэтому, не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_1 &\equiv D \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}} \right) \geq 0, \\ \Delta'_2 &\equiv D \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1, b_2, \dots, b_q} \right) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Въ силу второго изъ этихъ неравенствъ, послѣднія q уравненій первой строки системы (57) даютъ

$$b_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{n-q+1}, \dots, p_n, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Внося послѣднія значенія b_1, b_2, \dots, b_q въ $n-q-1$ первыя уравненія первой строки и въ q первыя уравненія второй строки системы (57), получаемъ равенства

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right), \quad k = 2, 3, \dots, n-q, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial b_r} \right) &= a_r, \quad r = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Легко показать, что послѣднія уравненія (60) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ представляютъ собой преобразование интеграловъ въ инволюціи канонической системы (23).

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ въ слѣдующемъ видѣ полную систему интеграловъ системы (55), которые опредѣляются уравненіями (57).

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= b_s, \\ f_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= a_s, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Какъ хорошо извѣстно, послѣдніе интегралы образуютъ каноническую систему, по отношенію къ уравненіемъ (55). Въ виду того, что существуютъ зависимости

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^n \left(\frac{\partial F_s}{\partial p_n} \frac{\partial f_s}{\partial x_n} - \frac{\partial F_s}{\partial x_n} \frac{\partial f_s}{\partial p_n} \right) &\equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \left(\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial f_s}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial F_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial f_s}{\partial p_{r+1}} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^q \left[\frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial f_s}{\partial (-p_{n-q+i})} - \frac{\partial F_s}{\partial (-p_{n-q+i})} \frac{\partial f_s}{\partial x_{n-q+i}} \right], \end{aligned}$$

становится очевиднымъ, что уравненія (61) образуютъ каноническую систему интеграловъ также по отношенію къ исходной канонической системѣ (23). Слѣдовательно, уравненія (60) равнозначны $n-1$ уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} F_{q+k}(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n) &= b_{q+k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n) &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

и опредѣляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи по отношенію къ канонической системѣ (23).

Такъ какъ исходные $n-1$ интеграловъ, согласно со сдѣланнымъ предположеніемъ, могутъ также разрѣшаться относительно переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n , то отсюда слѣдуетъ, что уравненія (62) вообще могутъ и не разрѣшаться относительно послѣднихъ переменныхъ.

Не останавливаясь сейчасъ на этомъ замѣчаніи, такъ какъ намъ придется разобрать его подробно, воспользуемся первыми $n-1$ интегралами (61), чтобы представить уравненіе (56) въ слѣдующемъ видѣ

$$z - F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = b,$$

при чемъ имѣетъ мѣсто тождество

$$F \equiv U(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}).$$

Само собою разумѣется, что, составляя скобки Вейлера, по отношенію къ канонической системѣ (55), т. е. подраздѣляя каноническія переменныя на слѣдующіе два класса, соответствующіе обѣимъ строкамъ

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, & \quad -p_{n-q+1}, \quad -p_{n-q+2}, \dots, -p_n, \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-q}, & \quad x_{n-q+1}, \quad x_{n-q+2}, \dots, x_n, \end{aligned}$$

получаемъ слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} [p_1 + H, z - F] &= 0, \\ [F_s, z - F] &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Вычислимъ, наконецъ, въ этомъ же предположеніи, значеніе скобокъ

$$[f_s, z - F] \equiv [f_s, z] - (f_s, F).$$

Вводимъ слѣдующія обозначенія

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \theta_s, \quad (64)$$

благодаря которым получаемъ тождества

$$f_s \equiv \theta_s (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, F'_1, F'_2, \dots, F'_{n-1}),$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$. Поэтому имѣемъ

$$[f_s, z] \equiv \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} [F'_v, z],$$

$$(f_s, F) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial b_u} (\theta'_s, F'_u) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F'_v, U') + \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_u} \frac{\partial U}{\partial b_v} (F'_u, F'_v).$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, -p_{n-q+1}, \dots, -p_n$$

являются каноническими перваго класса, то выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$[F'_v, z] \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F'_v}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F'_v}{\partial x_{n-q+i}} x_{n-q+i},$$

$$(\theta'_s, F'_u) \equiv - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \theta'_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F'_u}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial \theta'_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F'_u}{\partial x_{n-q+i}},$$

$$(F'_v, U') \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F'_v}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F'_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Въ виду того, что имѣютъ мѣсто тождества

$$F'_u \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial p_n}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, p_{n-q+1}, \dots, p_n \right) \equiv b_u,$$

$$u = 1, 2, \dots, n-1,$$

то, дифференцируя ихъ по всѣмъ b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$-\sum_{i=1}^q \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-q+i} \partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_{r+1} \partial b_s} \equiv \begin{cases} 0, & s \geq u, \\ 1, & s = u. \end{cases}$$

Поэтому, въ силу введенныхъ обозначеній (64), заключаемъ, что

$$(\theta'_s, F_u) \equiv \begin{cases} 0, & s \geq u, \\ -1, & s = u. \end{cases}$$

Кромѣ того принимая во вниманіе, что

$$(F_u, F_r) = 0,$$

приводимъ вычисляемые нами скобки Вейлера къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} [f_s, z - F] \equiv & \frac{\partial U}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_s} \left(\sum_{r=1}^{n-q-1} p_{r+1} \frac{\partial F_r}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} \frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \\ & - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_s} \left(\sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F_r}{\partial p_{r+1}} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}} \right). \end{aligned}$$

Въ силу тождествъ, въ которыя обращаются первыя $n-1$ уравненій (57), когда въ нихъ подставить значенія b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , опредѣляемые этими же уравненіями, выраженія суммъ обѣихъ послѣднихъ строчекъ равны; стало-быть, разность ихъ уничтожается, и мы получаемъ въ результатъ равенства

$$[f_s, z - F] \equiv f_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (65)$$

Равенства (63) и (65) заключаютъ скобки Вейлера, составленныя относительно канонической системы (55).

Однако легко воспользоваться этими зависимостями, чтобы составить замкнутую систему $n-1$ уравненій по отношенію къ канонической системѣ (23). Въ силу условій (63) и (65), мы имѣемъ слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} p_1 + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (p_1 + H, F) &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_s}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (F_s, F) &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial f_s}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_s}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (f_s, F) &= f_s, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$s = 1, 2, \dots, n-1,$

при чемъ скобки Пуассона $(p_1 + H, F)$, (F_s, F) и (f_s, F) составлены здѣсь по отношенію къ канонической системѣ (23), т. е. въ предположеніи, что переменныя величины раздѣляются на два класса, соответствующіе двумъ строкамъ

$$\left. \begin{array}{l} x_2, x_3, \dots, x_n, \\ p_2, p_3, \dots, p_n. \end{array} \right\} \quad (67)$$

Составляемъ, наконецъ, слѣдующее выраженіе

$$\Phi \equiv z - F - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i} + \sum_{i=1}^q f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія скобокъ Вейлера, въ канонической системѣ переменныхъ (67),

$$\begin{aligned} [p_1 + H, \Phi] &\equiv [p_1 + H, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (p_1 + H, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i(p_1 + H, F_i) + F_i(p_1 + H, f_i)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F_{q+k}, \Phi] &\equiv [F_{q+k}, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (F_{q+k}, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i(F_{q+k}, F_i) + F_i(F_{q+k}, f_i)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_r, \Phi] &\equiv [f_r, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (f_r, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i(f_r, F_i) + F_i(f_r, f_i)], \end{aligned}$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n-q-1$, и для значеній r , отъ 1 до q . Такъ какъ интегралы (61) образуютъ каноническую систему одновременно по отношенію къ каноническимъ системамъ какъ (23) такъ и (55), то, для разсматриваемыхъ сейчасъ формулъ, имѣютъ мѣсто равенства

$$(F_{q+k}, F_i) \equiv 0, \quad (f_r, f_i) \equiv 0,$$

$$(F_s, f_\sigma) \equiv \begin{cases} 0, & s \not\geq \sigma, \\ 1, & s = \sigma. \end{cases}$$

Кромѣ того, принимая въ расчетъ уравненія (66), мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$[p_1 + H, \Phi] = 0, \quad [F_{q+k}, \Phi] = 0, \quad [f_r, \Phi] = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n - q - 1, \quad r = 1, 2, \dots, q.$$

Отсюда заключаемъ, что совокупность $n+1$ уравнений (22)-го (62)-ыхъ и слѣдующаго

$$z = F + \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^q f_i F_i + b_n$$

образуетъ замкнутую систему, при чемъ b_n представляетъ новую произвольную постоянную величину.

Здѣсь слѣдуетъ однако различать два случая, когда классъ представляемаго послѣдней системой полнаго интегральнаго собранія равенъ нулю, или отличенъ отъ него, въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли уравненія (62) относительно переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n , или нѣтъ. Рассматриваемая въ первомъ случаѣ система уравнений, путемъ исключенія всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , приводитъ къ слѣдующему полному интегралу Лагранжа уравненія (22)

$$z = U[x_1, \dots, x_{n-q}, (p_{n-q+1}), \dots, (p_n), (F_1), \dots, (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}] + \\ + \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} (p_{n-q+i}) - \sum_{i=1}^q a_i (F_i) + b_n,$$

гдѣ круглыми скобками обозначенъ результатъ подстановки въ выраженія, заключенныя въ скобки, значений исключаемыхъ переменныхъ.

Если же уравненія (62) неразрѣшимы относительно всѣхъ переменныхъ p , то эта система (62) опредѣляетъ полный интегралъ С. Ли уравненія (22), рассматриваемаго какъ *производное* уравненіе С. Ли. Чтобы получить отсюда, при помощи алгебраическихъ исключеній, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), рассматривая его какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, остается воспользоваться результатами, доказанными въ 107-омъ настоящей главы.

Изложенныя соображенія, относительно составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа одного дифференціального уравненія съ частными производными перваго порядка, распространяются безъ труда на какія угодно системы совокупныхъ уравнений какъ независимыхъ явно отъ неизвѣстной функции z , такъ и заключающихъ послѣднюю функциональную переменную. Это заключеніе ясно слѣдуетъ изъ всего изложенія настоящей главы. Поэтому мы не станемъ останавливаться на доказательствахъ указанныхъ здѣсь обобщеній и ограничимся только слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Только что разрѣшенная задача позволяетъ составлять полный интегралъ Лагранжа, на основаніи извѣстнаго полнаго интеграла С. Ли,

или даетъ возможность, для составленія полного интеграла Лагранжа, переходить отъ одного полного интегрального собранія нулевого класса къ другому для того, чтобы обойти тѣ или другія трудности вычисленій, которыя могутъ встрѣчаться при составленіи интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Разсматриваемая задача находится въ тѣсной связи съ такъ называемымъ *усовершенствованіемъ С. Ли* способа Якоби-Майера интегрированія частныхъ уравненій ¹⁾, съ той только разницей, что С. Ли прилагаетъ свою теорію къ своимъ *производнымъ* уравненіямъ, тогда какъ соображенія, изложенныя на послѣднихъ страницахъ, имѣютъ главною цѣлью интегрированіе дифференціальныя уравненія. Какъ мы раньше указывали ²⁾, рѣшеніе Майера послѣдняго вопроса было ошибочнымъ: что же касается моего предложеннаго раньше рѣшенія ³⁾, то оно требуетъ одной квадратуры больше, чѣмъ только что изложенное рѣшеніе, которое основывается исключительно на алгебраическихъ преобразованіяхъ ⁴⁾.

10. Воспользуемся полученными результатами, чтобы показать, какія видоизмѣненія, благодаря имъ, могутъ быть внесены въ извѣстный способъ Якоби-Майера интегрированія дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Пусть имѣемъ *замкнутую* систему m слѣдующихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

которыя, предположимъ, разрѣшимъ относительно m какихъ либо частныхъ производныхъ. Для интегрированія данныхъ уравненій, намъ достаточно однако разрѣшить ихъ относительно m какихъ либо изъ переменныхъ съ различными значками. Пусть, напримѣръ, данныя уравненія разрѣшаются относительно переменныхъ

1) S. Lie, *Mathematische Annalen*, Bd. VIII, S. 215.

2) См. мои сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus. 26 juin 1899).*

3) См.: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 103 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer (Comptes rendus. 3 juillet 1899).*

4) Послѣдніе результаты были опубликованы мною въ двухъ статьяхъ: *Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange (Comptes rendus, 10 août 1903)* и *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (Comptes rendus. 17 août 1903).*

$$p_1, p_2, \dots, p_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій въ инволюціи

$$\left. \begin{aligned} p_i &= H_i(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n), \\ &\quad i=1, 2, \dots, k, \\ x_{k+j} &= L_j(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n), \\ &\quad j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Для опредѣленія искомага полного интеграла данныхъ уравненій начнемъ съ разысканія уравненія

$$F_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n) = b_1, \quad (70)$$

которое должно находиться въ инволюціи съ системой (69), при чемъ b_1 представляетъ произвольную постоянную величину. Для этого должны удовлетворяться условія

$$\begin{aligned} (p_i - H_i, F_{m+1}) &= 0, & (x_{k+j} - L_j, F_{m+1}) &= 0, \\ i=1, 2, \dots, k, & & j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned}$$

Поэтому функція F_{m+1} должна служить интеграломъ слѣдующей яковійевской системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи f величинъ $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя переменныя,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{r=1}^{n-m} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+r}} \right) &= 0, \\ i=1, 2, \dots, k, \\ - \frac{\partial f}{\partial p_{k+j}} + \sum_{r=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+r}} \right) &= 0, \\ j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ уравненіе (70) представляетъ интеграль канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\begin{aligned} dx_{m+r} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} dx_i - \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}} dp_{k+j}, \\ dp_{m+r} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}} dx_i + \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}} dp_{k+j}, \\ r=1, 2, \dots, n-m. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, искомый интеграль (70) опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка $2(m-n)$. Присоединяя уравненіе (70) къ исходной системѣ уравненій, получаемъ новую замкнутую систему $m+1$ уравненія, съ которой поступаемъ аналогично тому, какъ поступали съ первоначальной системой. Продолжая указанная дѣйствія, мы приходимъ, какъ въ способѣ Якоби-Майера и при помощи равнаго съ нимъ числа эквивалентныхъ операцій интегрированія, къ системѣ n уравненій въ инволюціи слѣдующаго общаго вида

$$\begin{aligned} p_i &= H'_i(x_1, x_2, \dots, x_q, p_{q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \\ &\quad i=1, 2, \dots, q. \\ x_{q+j} &= L'_j(x_1, x_2, \dots, x_q, p_{q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \\ &\quad j=1, 2, \dots, n-q. \end{aligned}$$

гдѣ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Затѣмъ, при помощи одной квадратуры, получается уравненіе, выражающее въ общемъ случаѣ переменную z функціей остальныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ и еще одной новой произвольной постоянной b . Мы приходимъ такимъ образомъ къ полному интегральному собранію данной системы уравненій (68), изъ котораго получается ихъ полный интеграль Лагранжа, при помощи алгебраическихъ исключеній, какъ только что показано на предыдущихъ страницахъ.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_3 p_3) x_3 p_2}{x_1 p_4} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \quad (71)$$

Слѣдующія два уравненія

$$\frac{x_1 p_4}{p_2} = b_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_4}{x_3 p_2} \right) = b_2$$

образуютъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (71), систему трехъ уравненій въ инволюціи, при чемъ b_1 и b_2 обозначаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины. Эти уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$p_1 - \frac{b_1}{(x_1 - b_2)^2} p_3 + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} p_4 = 0,$$

$$p_3 - \frac{x_1 p_4}{b_1} = 0,$$

$$x_3 - \frac{b_1}{x_1 - b_2} = 0.$$

Соответствующая яacobievская система линейныхъ уравненій съ частными производными функціи

$$f(x_1, x_2, x_4, p_3, p_4)$$

становится

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_4}{x_1 - b_2} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Поэтому задача приводится къ интегрированію слѣдующей канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_4 = \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} dx_1 - \frac{x_1}{b_1} dx_2,$$

$$dp_4 = -\frac{p_4}{x_1 - b_2} dx_1.$$

Каждое изъ написанныхъ уравненій интегрируется при помощи квадратуры. Если возьмемъ интегралъ перваго изъ послѣднихъ уравненій

$$\frac{b_1 x_4 - x_1 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} = b_3,$$

гдѣ b_3 —новая произвольная постоянная величина, то, совершивъ еще одну квадратуру, получаемъ полный интегралъ С. Ли втораго класса даннаго уравненія (71), представленный слѣдующими тремя уравненіями

$$z = b_4,$$

$$x_3 = \frac{b_1}{x_1 - b_2},$$

$$x_4 = \frac{1}{b_1} x_1 x_2 + b_3 (x_1 - b_2),$$

гдѣ b_4 —новая произвольная постоянная величина. Прилагая въ настоящемъ случаѣ теорію, изложенную въ предыдущемъ н^о7-омъ, получаемъ полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (71) въ слѣдующемъ видѣ

$$z = a_2 \left(\frac{b_1}{x_3} - x_1 \right) - \frac{a_3}{b_1} x_3 \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_1} \right) + b,$$

гдѣ a_2 , a_3 , b_1 и b обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Г Л А В А VIII.

Задача С. Ли.

1. Разрѣшенный С. Ли вопросъ, извѣстный въ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными подъ названіемъ *задачи С. Ли*, является однимъ изъ цѣнныхъ вкладовъ С. Ли въ научную область интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Благодаря ему обнаруживается практическое значеніе, которое представляетъ каждый интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для интегрированія соотвѣствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Какъ извѣстно, до С. Ли, послѣдній вопросъ оставался открытымъ, и всякій единичный интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, который не находится въ инволюціи съ ихъ остальными интегралами, не могъ быть использованъ при интегрированіи разсматриваемыхъ уравненій въ тѣхъ случаяхъ, когда общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій характеристикъ оставался неизвѣстнымъ. Кромѣ того разсматриваемая теорія даетъ новые случаи интегрированія при помощи квадратуръ уравненій каноническихъ и съ частными производными (см. мою статью: *Sur le problème de S. Lie, Comptes rendus, 24 août 1903*). Такимъ образомъ рѣшеніе задачи С. Ли является существеннымъ дополненіемъ и дальнѣйшимъ развитіемъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

С. Ли дважды возвращался въ своихъ изслѣдованіяхъ къ рѣшенію разсматриваемой задачи ¹⁾, при чемъ во второмъ изложеніи значительно усовершенствовалъ свою теорію. Рѣшеніе С. Ли, воспроизведенное во всѣхъ его существенныхъ чертахъ въ сочиненіяхъ Гурса и Э. Вебера ²⁾, основано на столь сложныхъ началахъ, что популяризація самой теоріи и примѣненіе ея для практическихъ цѣлей совершались до сихъ поръ въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ ³⁾.

¹⁾ Mathematische Annalen Bd. VIII, S. 248, Bd. XI. S. 464.

²⁾ Goursat. E.—Leçons sur l'intégration... p. 304.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 541.

³⁾ Едва-ли не единственное приложеніе разсматриваемой теоріи сдѣлано А. Майеромъ въ его мемуарѣ: *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie* (Mathematische Annalen, Bd. XVII, S. 332).

Основываясь на приведенныхъ соображеніяхъ относительно значенія разсматриваемой теоріи, мы изложимъ ее ниже съ точки зрѣнія развитія Якоби-Гамильтоновскаго способа интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ VII главѣ моего цитированнаго уже выше сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными*, приведено рѣшеніе занимающей насъ задачи въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ разсматриваетъ ее С. Ли въ VIII томѣ *Mathematische Annalen*. Дальнѣйшее развитіе указаннаго рѣшенія опубликовано мною, въ краткихъ чертахъ, въ статьѣ: *Sur le problème de S. Lie* (*Comptes rendus*, 24 août 1903) и будетъ изложено подробно на послѣдующихъ страницахъ.

Необходимо, наконецъ, отмѣтить, что поставленная С. Ли задача уже раньше намѣчалась Якоби въ его трудахъ и разсматривалась имъ при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ и условіяхъ, которыя соотвѣтствовали современному той эпохѣ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными общаго вида и въ частности линейныхъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, Якоби вводилъ въ свои изслѣдованія разсмотрѣніе *функциональных группъ интеграловъ* дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣствующихъ даннымъ частнымъ уравненіямъ. Но онъ не пользовался при этомъ терминомъ *функциональная группа интеграловъ*, введеннымъ только С. Ли, и не извлекъ изъ разсмотрѣнія интеграловъ въ общемъ случаѣ всѣхъ тѣхъ преимуществъ для интегрированія данныхъ уравненій, которыя открылъ С. Ли¹⁾. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ указать на одинъ частный случай относительно дифференціальныхъ уравненій движенія системъ точекъ, допускающихъ три *интеграла площадей*, когда Якоби пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, которые вытекаютъ изъ разсматриваемой общей теоріи С. Ли²⁾. Наконецъ, Якоби отмѣтилъ нѣсколько частныхъ случаевъ въ своей общей теоріи, которые показываютъ его стремленія къ тому, чтобы использовать извѣстные интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для уменьшенія трудностей интегрированія соотвѣствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными³⁾.

1) *Jacobi*.—*Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*. (*Gesammelte Werke*. Bd. V, S. 151).

2) *Jacobi*.—*Nova methodus*... S. 153—163.

3) *Jacobi*.—*Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe*, 1881. S. 263.

Imshenetzky. V. G.—*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. 1869. p.p. 68—69.

2. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными въ *инволюции*

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ p_1, p_2, \dots, p_m , такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0. \quad (2)$$

Составляемъ систему линейныхъ уравненій въ *инволюции*, соответствующую даннымъ уравненіямъ (1)

$$(F_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Предположимъ, наконецъ, что извѣстны $m + r$ ($r < 2n - 2m$) слѣдующихъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_r, \quad (4)$$

которые образуютъ *функциональную группу*, т. е. скобки Пуассона, составленныя изъ каждой пары интеграловъ (4), не представляютъ новыхъ интеграловъ системы (3), отличныхъ отъ интеграловъ (4)-ыхъ.

Какъ извѣстно, линейныя уравненія

$$\left. \begin{aligned} U_k(f) \equiv (f_k, f) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

образуютъ замкнутую систему совместно съ уравненіями (3) ¹⁾. Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы составить изъ послѣднихъ уравненій (5) такую замкнутую систему линейныхъ уравненій, которая имѣла бы интегралами функціи (4). Уравненія искомой системы должны имѣть слѣдующій видъ

$$V(f) \equiv \sum_{k=1}^r \Pi_k(F_1, F_2, \dots, f_r) U_k(f) = 0,$$

гдѣ Π_k представляютъ неизвѣстныя функціи.

¹⁾ Goursat, E.—Leçons sur l'intégration... p. 308.

Само собою разумѣется, что функціи F_1, F_2, \dots, F_m утождествляютъ всѣ уравненія предыдущаго вида. Чтобы удовлетворить поставленному условію относительно остальныхъ функцій (4), необходимо опредѣлить значенія всѣхъ Π_k такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r \alpha_{ks} \Pi_k = 0, \\ s = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\alpha_{ks} \equiv (f_k, f_s).$$

Такъ какъ уравненія (6) линейны и однородны относительно неизвѣстныхъ величинъ Π_k , то, чтобы послѣднія имѣли значенія, отличныя отъ нулей, необходимо долженъ обращаться въ нуль слѣдующій опредѣлитель

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{1r} & \alpha_{2r} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Предположимъ, что уничтожается не только послѣдній опредѣлитель S , но также и всѣ его миноры, отъ перваго до $q-1$ -аго порядка включительно, такъ что первый миноръ, не обращающійся въ нуль, представляетъ опредѣлитель $r-q$ -аго порядка. Въ виду того, что порядокъ, въ которомъ мы размѣщаемъ интегралы (4), вполне произволенъ и зависитъ отъ нашего усмотрѣнія, то мы можемъ, не нарушая общности разсужденій, обозначить извѣстные интегралы (4) такъ, чтобы первый неуничтожающійся миноръ опредѣлителя (7) представлялся слѣдующимъ опредѣлителемъ

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r-q, 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r-q, 2} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{1, r-q} & \alpha_{2, r-q} & \dots & \alpha_{r-q, r-q} \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ послѣдній опредѣлитель косою симметрическій и, по условію, неравенъ нулю, то, стало-быть, порядокъ его является четнымъ числомъ, какъ это хорошо извѣстно изъ теоріи опредѣлителей. Называя его, напримѣръ, черезъ $2q$, мы получаемъ такимъ образомъ, что

$$r - q \equiv 2q, \quad (8)$$

т. е. разность $r - q$ является четным числом.

Возвращаясь къ уравненіямъ (6), мы получаемъ изъ нихъ

$$P_k = - \sum_{j=1}^q \frac{D_{kj}}{D} P_{2p+j},$$

$$k = 1, 2, \dots, 2p,$$

гдѣ D_{kj} обозначаетъ значеніе, которое принимаетъ опредѣлитель D , при замѣнѣ его элементовъ k -аго столбца соответственно величинами

$$\alpha_{2p+j, 1}, \alpha_{2p+j, 2}, \dots, \alpha_{2p+j, 2p}.$$

Благодаря вычисленнымъ значеніямъ P_k , выраженіе $V(f)$ становится

$$V(f) \equiv \sum_{j=1}^q P_{2p+j} V_j(f),$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$V_j(f) \equiv U_{2p+j}(f) - \sum_{k=1}^{2p} \frac{D_{kj}}{D} U_k(f),$$

$$j = 1, 2, \dots, q.$$

Вслѣдствіе произвольности всѣхъ величинъ P_{2p+j} , соответствующихъ различнымъ значеніямъ j , отъ 1 до q , становится очевиднымъ, что всѣ выраженія $V_j(f)$ обладаютъ свойствами, аналогичными выраженіямъ $V(f)$, т. е. уничтожаются для всѣхъ значеній (4) функции f . Поэтому мы получаемъ систему q уравненій

$$V_j(f) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

интегралами которой служатъ функции (4).

Само собою разумѣется, что уравненія (3) и (9) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ существуютъ общіе всѣмъ имъ интегралы (4). Кроме того изъ самаго строенія разсматриваемыхъ уравненій видно, что всѣ они различны между собой. Мы получаемъ такимъ образомъ, при помощи алгебраическихъ вычисленій, замкнутую систему $m + q$ различныхъ уравненій (3) и (9), для которой извѣстны $m + r$ различныхъ интеграловъ (4).

Очевидно, что задача интегрированія исходной системы уравненій (1) упрощается, въ смыслѣ пониженія порядка интегрированій, если

опредѣлять новые интегралы системы (3), отличные отъ (4)-ыхъ, какъ интегралы замкнутой системы, образованной совокупностью уравненій (3) и (9).

Такъ какъ извѣстны $m+r$ интеграловъ послѣдней системы, то ея новый интеграль опредѣляется при помощи операціи интегрированія, порядокъ которой выражается числомъ

$$2n - 2m - q - r.$$

Послѣднее, въ силу зависимости (8), является четнымъ и равно числу

$$2n - 2m - 2q - 2r.$$

Назовемъ черезъ f_{r+1} полученный такимъ образомъ интеграль разсматриваемой системы. Послѣдній интеграль, въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, образуетъ, совместно съ (41)-ыми, функціональную группу, которая очевидно имѣетъ по меньшей мѣрѣ одной *существенной функціей*¹⁾ больше сравнительно съ прежней группой, такъ какъ разность между числомъ всѣхъ функцій группы $m+r+1$ и числомъ прежнихъ *существенныхъ функцій* $m+q$ является нечетнымъ $2r+1$, что невозможно въ силу изложенныхъ выше соображеній. Предположимъ, что разсматриваемая группа имѣетъ только одной *существенной функціей* больше сравнительно съ предыдущей. Въ такомъ случаѣ мы составляемъ еще одно уравненіе

$$V_{q+1}(f) = 0,$$

образующее, совместно съ предыдущими, замкнутую систему $m+q+1$ уравненій, для которой извѣстны очевидно $m+r+1$ интеграловъ. Поэтому новый интеграль, который обозначимъ черезъ f_{r+2} , опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка

$$2n - 2m - 2q - 2r - 2.$$

Продолжая поступать аналогичнымъ образомъ и далѣе, приходимъ въ результатъ, при самомъ неблагопріятномъ случаѣ, послѣ $n-m-q-r$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2n - 2m - 2q - 2r, \quad 2n - 2m - 2q - 2r - 2, \dots 4, 2,$$

къ $n-m-q-r$ различнымъ новымъ интеграламъ системы (3)

¹⁾ *Существенными (ausgezeichnete, distinguée) функціями группы называются такія, которыя находятся въ инволюціи какъ между собой, такъ и съ каждой изъ функцій группы въ отдѣльности (см. мое изслѣдованіе: Объ интегрированіи уравненій..., глава VIII).*

$$f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_{n-m+p},$$

(въ силу зависимости (8), число $n-m-q-r$ равняется $n-m+p$).

Такимъ образомъ въ результатѣ получается слѣдующая замкнутая система $n-q$ линейныхъ уравненій

$$\begin{aligned} (F_i, f) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ V_j(f) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad q+1, \dots, n-m-p, \end{aligned}$$

для которой извѣстна полная система ея $n-p$ различныхъ интеграловъ

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{n-m+p}. \quad (10)$$

3. Согласно съ изложеннымъ, послѣдняя группа интеграловъ (10) имѣетъ $n-p$ *существенныхъ функций*, въ числѣ которыхъ находятся m первыхъ интеграловъ (10).

Остальные $n-m-p$ *существенныхъ функций*, которыя мы обозначимъ черезъ

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_q, \Phi_{q+1}, \dots, \Phi_{n-m-p} \quad (11)$$

могутъ быть вычислены, при помощи $n-m-p$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія порядковъ

$$n-m-p, \quad n-m-p-1, \dots, q, \quad q-1, \dots, 2, \quad 1.$$

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) очевидно привелась бы къ одной только квадратурѣ, если бы эти послѣднія функции были извѣстны. Квадратура эта состоитъ въ разысканіи послѣдняго интеграла системы линейныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ [\Phi_j, f] &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad q+1, \dots, n-m-p, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

гдѣ функция f разсматривается какъ зависящая отъ всѣхъ прежнихъ переменныхъ x, p и отъ новой переменной z .

Интегралами послѣдней системы служатъ очевидно всѣ функции (10). Приравнявъ m первыхъ изъ нихъ нулю, а всѣ остальные произвольнымъ постояннымъ, получаемъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= b_k, \\ k &= 1, 2, \dots, r, \quad r+1, \dots, n-m+p, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

гдѣ всѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Последняя система представляетъ $n + q$ интегральныхъ уравненій системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующихъ линейнымъ уравненіямъ (12). Последний ея интегралъ получается интегрированіемъ точнаго дифференціала, въ который обращается уравненіе

$$dz = \sum_{i=1}^n p_i dx_i, \quad (14)$$

на основаніи интегральныхъ уравненій (13) (ср. стр. 148). Такимъ образомъ послѣдній искомый интегралъ системы (12) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (15)$$

Однако для рѣшенія разсматриваемой задачи интегрированія данныхъ уравненій (1), нѣтъ надобности вычислять функціи (11), но достаточно замѣтить, что всѣ уравненія $V_j(f) = 0$ равнозначны слѣдующимъ линейнымъ уравненіямъ ¹⁾

$$(\Phi_j, f) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, q+1, \dots, n-m-q. \quad (16)$$

Это замѣчаніе является существеннымъ въ томъ отношеніи, что мы имѣемъ теперь теоретическое основаніе утверждать, что *уравненіе (14), въ силу системы уравненій (13), обращается въ точный дифференціалъ, интегрированіемъ котораго опредѣляется функція (15).*

4. Доказанныхъ предложеній достаточно, чтобы показать, что интегрированіе уравненій (1), на основаніи полученныхъ данныхъ, совершается при помощи операцій дифференцированія и алгебраическихъ исключеній.

Въ самомъ дѣлѣ, соответствующая даннымъ уравненіямъ (1) нормальная система линейныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

имѣеть $n + q + 1$ различныхъ интеграловъ (10) и (15). Легко показать, что остальные $n - m - q$ интеграловъ этой системы (17) опредѣляются при помощи дифференцированія, и тогда очевидно, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) разрѣшается на основаніи теоріи характеристикъ.

¹⁾ См. *Объ интегрированіи уравненій...*, глава VII.

Чтобы составить эти послѣдніе недостающіе интегралы, приравняемъ интеграль (15) произвольной постоянной величинѣ b . Не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить, что полученное такимъ образомъ уравненіе и уравненія (13)-ья разрѣшаются относительно переменныхъ

$$z, x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и выражаютъ слѣдующимъ образомъ ихъ значенія въ функціяхъ остальныхъ переменныхъ и всѣхъ $n-m+\rho+1$ произвольныхъ постоянныхъ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}) + b, \\ x_{n-\rho+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}), \\ p_s &= \varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}), \\ i &= 1, 2, \dots, \rho, \quad s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Вслѣдствіе того, что результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}$, изъ $n+\rho$ послѣднихъ уравненій (18), приводитъ къ данной системѣ (1), разрѣшающей относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , въ силу условія (2), то должно имѣть мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_n}{b_1, b_2, \dots, b_\rho, b_{\rho+1}, b_{\rho+2}, \dots, b_{n-m+\rho}} \right) \geq 0.$$

Напишемъ въ явной формѣ значеніе опредѣлителя лѣвой части послѣдняго неравенства

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{array} \right| \quad (19)$$

Такъ какъ равенство (14) утождествляется, на основаніи уравненій (18), то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left. \begin{aligned} \psi_s &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \psi_{n-\rho+i}, \\ s &= 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n-\rho. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Отсюда выводятся слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial b_k} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{m+j} \partial b_k} - \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_{m+j} \partial b_k} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k} \right),$$

$$j = 1, 2, \dots, n-m-\rho,$$

для всѣхъ значений k , отъ 1 до $n-m+\rho$. Подставляемъ послѣднія значенія производныхъ $\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial b_k}$, вмѣсто элементовъ всѣхъ столбцовъ определителя (19), отъ $\rho+1$ -аго до $n-m$ -аго столбца включительно. Въ этихъ послѣднихъ выраженіяхъ элементовъ отбрасываемъ всѣ члены вида

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m+j}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k},$$

какъ пропорціональные элементамъ послѣднихъ ρ столбцовъ определителя (19), и прибавляемъ взамѣнъ ихъ члены, которые пропорціональны элементамъ первыхъ ρ столбцовъ рассматриваемаго определителя

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_k} \cdot \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial x_{m+j}}.$$

Благодаря послѣднимъ преобразованиямъ, предыдущій определитель представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{vmatrix},$$

гдѣ обозначенія θ_k имѣютъ слѣдующія значенія

$$\theta_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_k} \psi_{n-p+i},$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n-m-\rho$.

Вслѣдствіе неравенства нулю послѣдняго опредѣлителя, не долженъ равняться нулю по меньшей мѣрѣ одинъ изъ его миноровъ $n-m-\rho$ -го порядка, который составленъ изъ элементовъ $\rho+1, \rho+2, \dots, n-m$ -го столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя. Пусть, на примѣръ, слѣдующій опредѣлитель-миноръ

$$D \left(\begin{array}{cccc} \theta_1, & \theta_2, & \dots & \theta_{n-m-\rho} \\ x_{m+1}, & x_{m+2}, & \dots & x_{n-\rho} \end{array} \right)$$

отличенъ отъ нуля. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} \psi_{n-p+i} = a_j, \\ j=1, 2, \dots, n-m-\rho, \end{array} \right\} \quad (21)$$

различны и разрѣшмы относительно всѣхъ переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{n-\rho},$$

при чемъ $a_1, a_2, \dots, a_{n-m-\rho}$ представляютъ $n-m-\rho$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко доказать, что уравненія (21) представляютъ недостающія $n-m-\rho$ интегральныхъ уравненій системы въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующей линейнымъ уравненіямъ (17). Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ выраженій θ_j значенія $b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}$, опредѣляемые уравненіями (18). Обозначимъ полученные результаты соответственно черезъ

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-\rho}. \quad (22)$$

Такъ какъ въ результатѣ произведенной подстановки функціи ψ_s принимаютъ тождественно значенія ρ_s , то функціи F_{m+j} выражаются слѣдующимъ образомъ

$$F_{m+j} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=2}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_1} \rho_{n-p+i},$$

при чемъ всѣ b_k замѣнены ихъ указанными выше функціональными значеніями.

Поэтому скобки Пуассона (F_σ, F_{m+j}) имѣютъ слѣдующее значеніе

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} + \\ + \sum_{k=1}^{n-m+\rho} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial b_k} (F_\sigma, f_k).$$

Подставляя сюда выраженія

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \partial x_s} p_{n-\rho+i},$$

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j},$$

$$(F_\sigma, f_k) \equiv 0.$$

получаемъ въ результатѣ

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \partial x_s} p_{n-\rho+i} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} \quad \left. \vphantom{\sum_{s=1}^{n-\rho}} \right\} \quad (23)$$

Съ другой стороны мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \equiv 0,$$

$$i=1, 2, \dots, m.$$

Дифференцируя послѣднія тождества по $b_1, b_2, \dots, b_{n-m-\rho}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} &\equiv 0, \\ \sigma &= 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n-m-\rho. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Вслѣдствіе равенствъ (20), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \right),$$

$$s=1, 2, \dots, n-\rho,$$

для всѣхъ значеній j , отъ 1 до $n-m-\rho$. Поэтому, послѣ подстановки значеній всѣхъ b_k , изъ уравненій (18), въ обѣ системы предыдущихъ равенствъ, тождества (24) становятся

$$\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{i=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_i} \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \right) \right] + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-\rho+i}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \equiv 0,$$

$$\sigma=1, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n-m-\rho.$$

Поэтому выраженія скобокъ Пуассона (23) принимаютъ слѣдующій видъ

$$(F_{\sigma}, F_{m+j}) \equiv \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \left(\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-\rho+i}} - \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \right), \quad (25)$$

$$\sigma=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n-m-\rho.$$

5. Прежде чѣмъ вести дальше наши разсужденія необходимо остановиться на нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ слѣдующую замкнутую систему m различныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f

$$\left. \sum_{k=1}^n X_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \right\} \quad (26)$$

$$i=1, 2, \dots, m,$$

удовлетворяющихъ условію

$$\begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \dots & X_1^m \\ X_2^1 & X_2^2 & \dots & X_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_m^1 & X_m^2 & \dots & X_m^m \end{vmatrix} \neq 0,$$

при чемъ коэффициенты X_i^k представляютъ функции всѣхъ переменныхъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n .

Предположимъ, что функции

$$f_1, f_2, \dots, f_{n-m}$$

представляютъ полную систему $n-m$ различныхъ интеграловъ уравненій (26), такъ что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n X_i^k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Вслѣдствіе предыдущаго неравенства, послѣдніе интегралы должны удовлетворять условію

$$D \left(\frac{f_1, f_2, \dots, f_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n} \right) \neq 0. \quad (28)$$

Поэтому слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} f_s(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, n-m, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

представляютъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующихъ линейной системѣ (26), и опредѣляютъ значенія переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n,$$

какъ функции остальныхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m . Въ силу послѣднихъ значеній, уравненія (29) обращаются въ тождества и даютъ мѣсто новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m.$$

Умножая послѣднія тождества соответственно на X_i^h и складывая полученные результаты, получаемъ новый рядъ тождествъ

$$\sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^m X_i^h \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Последнія, въ силу равенствъ (27), приводятся къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \left(\sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} \right) = 0,$$

$s=1, 2, \dots, n-m, \quad i=1, 2, \dots, m.$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства (28), получаются искомыя нами тождества

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} &= 0, \\ i=i, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n-m, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

которымъ должно удовлетворять каждое рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференциалахъ, соотвѣтствующихъ данной системѣ линейныхъ уравненій (26).

6. Послѣ сдѣланнаго отступленія, возвращаемся къ формуламъ (25). Совокупность уравненій (18) представляетъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференциалахъ, соотвѣтствующихъ замкнутой системѣ линейныхъ уравненій (12), которую представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial F'_\sigma}{\partial p_s} p_s \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$\sigma=1, 2, \dots, m,$

$$\sum_{j=1}^n \left(A_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} + B_j^s \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + C_j \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$j=1, 2, \dots, q, q+1, \dots, n-m-p.$

Поэтому тождества (30) въ настоящемъ случаѣ, благодаря обозначеніямъ уравненій (18), становятся

$$\sum_{s=1}^{n-p} \frac{\partial F'_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial x_s} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-p+i}} = 0,$$

$i=1, 2, \dots, p, \quad \sigma=1, 2, \dots, m,$

и т. д.

Для нашихъ цѣлей достаточно равенствъ написанной первой строки. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи послѣднихъ, скобки Пуассона (25) обращаются тождественно въ нуль, и мы получаемъ искомыя тождества

$$(F_{\sigma}, F_{m+j}) \equiv 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n - m - p.$$

Такимъ образомъ функціи (22) представляютъ $n - m - p$ искомымъ интеграловъ системы линейныхъ уравненій (17). Поэтому полный интегралъ данной системы уравненій въ инволюціи (1) опредѣляется совокупностью уравненій (18) и (21), при помощи операций алгебраическихъ исключеній, на основаніи *теоріи характеристикъ*. При этомъ произвольными постоянными служатъ всѣ $2n - 2m$ слѣдующихъ величинъ

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-m+p}, b, a_1, a_2, \dots, a_{n-m-p}. \quad (31)$$

Если послѣднія не удовлетворяютъ указаннымъ въ теоріи характеристикъ условіямъ, то необходимо принять начальные значенія слѣдующихъ переменныхъ величинъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z = \sum_{j=1}^{n-m} x_{m+j} p_{m+j}, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$$

произвольными постоянными величинами, вмѣсто постоянныхъ (31).

Относительно предыдущихъ вычисленій слѣдуетъ замѣтить, что при послѣдовательномъ разысканіи интеграловъ уравненій (3), мы предполагали всегда самый неблагоприятный случай, когда, при каждомъ новомъ интегрированіи, число интеграловъ: соответствующихъ функціональных группъ увеличивается только на единицу. Но если бы скобки Пуассона, составленныя изъ каждаго вновь полученнаго интеграла съ прежними, приводили къ новымъ интеграламъ разсматриваемыхъ уравненій, тогда, само собою разумѣется, что число указанныхъ операций интегрированія и порядокъ ихъ соответственно уменьшаются.

Наконецъ, если какой-либо изъ найденныхъ интеграловъ системы (3) находится въ инволюціи со всѣми остальными, то приравнивая его произвольной постоянной величинѣ и присоединяя полученное такимъ образомъ уравненіе къ исходнымъ (1), мы избѣгаемъ необходимости составлять одно изъ вспомогательныхъ уравненій вида $V(f) = 0$ и тѣмъ упрощаемъ вычисления.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему результату:

Пусть даны m уравненій въ инволюціи (1); предположимъ, что изъ дифференціальныя уравненія характеристикъ имѣютъ $m + r$ различныхъ интеграловъ (4), образующихъ функціональную группу съ $m + q$ существенными функціями. Въ такомъ случаѣ разность $r - q$ является некоторымъ четнымъ числомъ $2q$, и задача интегрированія уравненій (1) разрѣшается.

въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, при помощи $n-t-r-q$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2(n-t-r-q), 2(n-t-r-q-1), \dots, 4, 2,$$

одной квадратуры и при помощи алгебраическихъ исключеній.

Принтегрируемъ, напримѣръ, слѣдующее дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - e^2 p_2 (p_3 - p_4) = 0. \quad (32)$$

Соотвѣтствующее линейное уравненіе

$$(F_1, f) = 0 \quad (33)$$

имѣть, кромѣ интеграла F_1 , еще слѣдующихъ три интеграла

$$f_1 \equiv p_3, \quad f_2 \equiv x_3 p_4 + x_4 p_3 - p_2, \quad f_3 \equiv p_4,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(f_1, f_2) \equiv f_3, \quad (f_1, f_3) \equiv 0, \quad (f_2, f_3) \equiv f_1.$$

Значеніе соотвѣтствующаго опредѣлителя S

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 & 0 \\ f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & -f_1 & 0 \end{vmatrix}$$

равняется нулю. Первый неунитожжающійся миноръ послѣдняго опредѣлителя принадлежитъ первому порядку

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 \\ f_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv f_3^2.$$

Поэтому существуетъ одно линейное уравненіе

$$(f_3, f) - \frac{f_1}{f_3} (f_1, f) = 0, \quad (34)$$

образующее замкнутую систему съ уравненіемъ (33). Послѣдняя система линейныхъ уравненій (33) и (34) имѣть слѣдующій интеграль

$$F_2 \equiv x_1 p_1,$$

находящийся въ инволюции съ известными интегралами f_1, f_2, f_3 .

Составляемъ поэтому слѣдующую систему уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1,$$

$$f_1 = b_1, \quad f_2 = b_2, \quad f_3 = b_3,$$

гдѣ C_1, b_1, b_2, b_3 обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Последняя система уравненій даетъ

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3}, \quad p_3 = b_1, \quad p_4 = b_3, \\ x_4 &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3} + b_2 - b_3 x_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Въ силу послѣднихъ зависимостей, дифференціальное уравненіе

$$dz = \sum_{i=1}^4 p_i dx_i$$

даетъ, при помощи квадратуры, интегралъ

$$z = \left(b_1 - \frac{b_3^2}{b_1} \right) x_3 - \frac{C_1}{b_1} e^{-x_2} + C_1 \lg x_1 + b, \quad (36)$$

гдѣ b —новая произвольная постоянная величина.

Итакъ составляемъ систему двухъ уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1. \quad (37)$$

Система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующая линейнымъ уравненіямъ

$$[F_1, f] = 0, \quad [F_2, f] = 0,$$

имѣетъ рѣшеніе, представленное совокупностью уравненій (35), (36) и слѣдующаго

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_3} \psi_4 = a_3,$$

выраженного въ прежнихъ обозначеніяхъ. Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе становится

$$-\frac{b_3}{b_1} \left[x_3 + \frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)} \right] = a_3.$$

Поэтому совокупность этого уравненія съ (35)-ыми и (36)-ымъ опредѣляетъ слѣдующія выраженія

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{2 C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)} + C_1 \lg x_1 + b', \\ x_3 &= -\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)^2} - \frac{b_1 a_3}{b_3}, \quad x_4 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)^2} + \frac{b_2}{b_1} + a_3, \\ p_1 &= \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3}, \quad p_3 = b_1, \quad p_4 = b_3, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

гдѣ b' обозначаетъ новую произвольную постоянную величину, связанную слѣдующимъ образомъ съ постоянной b ,

$$b' = b + \frac{a_3}{b_3} (b_3^2 - b_1^2).$$

Вводимъ, вмѣсто обозначенія произвольныхъ постоянныхъ b_1 , b_2 , b_3 , a_3 и b' , величины

$$x_3^0, x_4^0, a, p_3^0, p_4^0,$$

представляющія начальныя значенія переменныхъ

$$x_3, x_4, z - x_3 p_3 - x_4 p_4, p_3, p_4,$$

соотвѣтствующія начальнымъ значеніямъ x_1^0 и x_2^0 независимыхъ переменныхъ x_1 и x_2 .

Въ такомъ случаѣ уравненія (38) преобразовываются въ слѣдующія

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{p_3^0 - p_4^0} + C_1 \lg \frac{x_1}{x_1^0} + a + x_3^0 p_3^0 + x_4^0 p_4^0, \\ x &= \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{(p_3^0 - p_4^0)^2} + x_3^0, \quad x_4 = \frac{C_1 (e^{-x_2} - e^{-x_2^0})}{(p_3^0 - p_4^0)^2} + x_4^0, \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{p_3^0 - p_4^0}, \quad p_3 = p_3^0, \quad p_4 = p_4^0.$$

Исключая x_3^0 и x_4^0 , из первых трех уравнений сейчас написанной системы, получаемъ полный интегралъ системы уравнений (37)

$$z = \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{p_3^0 - p_4^0} + C_1 \lg \frac{x_1}{x_1^0} + p_3^0 x_3 + p_4^0 x_4 + a.$$

при чемъ p_3^0 , p_4^0 и a являются тремя различными произвольными постоянными величинами.

Принимая въ последней формулѣ C_1 также за произвольную постоянную величину, мы выражаемъ этимъ же самымъ уравненіемъ искомый полный интегралъ даннаго уравненія (32), при чемъ C_1 , p_3^0 , p_4^0 , a представляютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 1 Марта 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.
 2. Произведены выборы проф. Тулузскаго университета Е. Cosserat. Избранъ единогласно.
 3. В. А. Стекловъ доложилъ статью А. Kneser'a: „Die Iacobi'sche Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung“.
 4. М. А. Тихомандрицкій отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовскаго сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля“.
-

Экстренное засѣданіе 10 Мая 1902 года.

1. Прочитанъ протоколъ предыдущаго засѣданія.
 2. В. А. Стекловъ сообщилъ, что В. П. Ермаковъ и К. А. Поссе благодарятъ за избраніе ихъ въ почетные члены, а А. П. Котельниковъ за избраніе его въ члены-корреспонденты Общества.
 3. Г. предсѣдательствующій сообщилъ, что университетъ въ Христианіи приглашаетъ Математическое Общество принять участіе въ чествованіи столѣтія со дня ражденія Абеля. Постановлено послать отъ имени Общества адресъ.
 4. Избранъ единогласно въ почетные члены Общества академикъ А. М. Ляпуновъ (безъ баллотировки).
-

Засѣданіе 12 Марта 1904 года.

1. Прочитанъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.
2. Предсѣдатель прочелъ письмо Д. И. Менделѣева съ выраженіемъ благодарности по поводу поздравленія въ день 75-лѣтняго юбилея.
3. По предложенію В. А. Стеклова постановлено предложить Краковской Академіи Наукъ обмѣнъ изданіями, при чемъ Общество просило В. А. Стеклова вступить въ переписку по этому поводу.
4. Доложена просьба слушательницъ С.-Петербургскихъ Женскихъ Курсовъ о высылкѣ изданій Общества для читальни; постановлено выслать 2-ую серію „Сообщеній“ Общества.
5. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе задачи Крелля“.
6. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „О комплексахъ прямыхъ“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА.

3 Октября 1904 года.

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности Общества за 1903—1904 акад. годъ.
 2. Предсѣдатель доложилъ о смерти почетнаго члена Общества акад. О. А. Бредихина и предложилъ почтить память его вставаніемъ.
 3. Предсѣдатель сдѣлалъ нѣкоторыя замѣчанія по поводу отчета о средствахъ Общества въ 1903—1904 году; при этомъ выяснилось, что остатокъ въ 1019 руб. 30 коп. объясняется тѣмъ, что ко времени составленія отчета не была произведена расплата съ типографіей Зильберберга за печатаніе „Сообщеній“ Общества; послѣ этой расплаты, предстоящей въ ближайшемъ будущемъ, остатокъ уменьшится приблизительно рублей на 500.
 4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета Общества на 1904—1905 академ. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя: проф. В. П. Алексѣевскій и проф. А. П. Грузинцевъ, секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшиборскій.
 5. По примѣру прежнихъ лѣтъ произведена добровольная подписка.
-

Засѣданіе 12 Ноября 1904 года.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.
 2. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.
 3. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной формулѣ анализа“.
 4. *Д. М. Синцовъ* доложилъ сообщеніе *В. П. Ермакова*: „Объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“.
-

Томъ IX, № 6.

СОДЕРЖАНІЕ.

Стран.

Исслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. <i>Н. Н. Салтыкова.</i>	241
Извлечение изъ протоколовъ засѣданій	293

СООБЩЕНІЯ Харьковского Математическаго Общества
издаются подъ редакцію распорядительнаго
комитета Общества.

Книжки Сообщеній выпускаются въ неопредѣленные сроки, по
мѣрѣ отпечатанія, въ размѣрѣ 3-хъ печатныхъ листовъ. Шесть вы-
пусковъ составляютъ томъ.

Желающіе подписаться на девятый томъ, второй серіи благоволятъ
адресовать свои заявленія на имя секретаря Общества въ Харьковскій
Университетъ. Подписная цѣна 3 рубля.

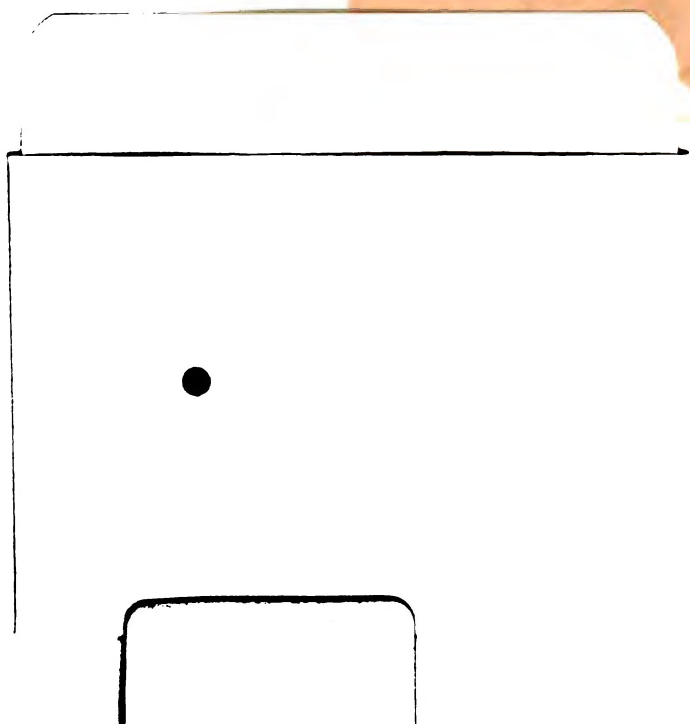
Продаются отдѣльно: 1) Выпуски первой серіи (18 номеровъ,
1879—1887 г.) по 50 коп., 2) Указатель статей, помѣщенныхъ въ
книжкахъ первой серіи, цѣна 20 коп., 3) Первые восемь томовъ 2-й серіи
(48 выпусковъ), цѣна по 3 рубля за томъ.

Съ требованіями и по всѣмъ дѣламъ, касающимся Общества,
просятъ обращаться также къ секретарю Общества въ Харьковскій
Университетъ.

Table des matières.

Pages.

Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue; par <i>M. N. Saltykow</i>	241
Extrait des procès verbaux des seances	293



3 2044 102 937 067